ELEMENTI DI FISICA IMMECCANICA OVVERO INTRODUZIONE A QUELLA PARTE PIÙ...

Jacopo Andrea Tommasini

ELEMENTI
DI
FISICA IMMECCANICA
OVVERO
INTRODUZIONE A QUELLA PARTE PIU' IMPORTANTE DI FILOSOFIA NATURALE

Che richiede principalmente la dimostrazione, e la distinzione delle forze intrinseche, ed inerenti a' Corpi, necessarie per effettuare la massima parte de' Fenomeni nell' Universo. Il tutto eseguito con metodo Matematico.

OPERA
DEL DOTTORE
JACOPANDREA TOMMASINI
PROFESSORE DI MEDICINA.
Tomo Primo.

LUCCA MDCCLXII.

Per GIUSEPPE ROCCHI
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ALL' ALTEZZA REALE
DI
D. FILIPPO
INFANTE DI SPAGNA, DUCA DI PARMA, PIACENZA, E GUASTALLA,

&c. &c. &c.

ALTEZZA REALE.

ON ad altro fine è piaciuto alla favolosa Antichità, che i Numi stessi presieda-

no alle Scienze, ed alle belle Arti, ſe non per dimoſtrarci, che tali occupazioni importantiſſime all' uman genere riconoſcono la loro naſcita, e la loro protezione dal Cielo; or ſiccome i Principi ſono in Terra un raggio ed un immagine della Divinità, debbono ad imitazione di eſſa farſi pregio di proteggere, ed incoraggiare quei Coltivatori di tali ſtudj, i quali, poſpoſti i loro comodi alla pubblica utilità, non riſparmiano nè ſudori, nè vigilie per dilatarne i confini.

Que-

*Questa eroica propensione ri-
splende particolarmente nell' a-
nimo Grande di* VOSTRA AL-
TEZZA REALE, *che non solo
dilettasi d' accogliere le Virtù
tutte sotto l' asilo del suo Pa-
trocinio, ma non contenta del-
le più erudite, e più dilette-
voli letterarie occupazioni, ha
voluto ad onta di tante cure,
che esige il Governo amoroso,
e giusto de' suoi Popoli, pene-
trare negli astrusi nascondiglj
dell' umano sapere, non ricu-
sando di adattare la Real ma-
no fino a trattare quei mara-*

vi-

vigliosi, ed a pochi noti simboli, che guidano alla precisione del vero, in occasione specialmente di contemplare il sovrumano magistero dell' Universo. A VOI *dunque*, REALE ALTEZZA, *era ben giusto, che io ossequiosamente offerissi questa mia qualunque siasi letteraria fatica; anzi me ne correva un obbligo indispensabile, per dare in tal guisa un pubblico attestato di perpetua gratitudine a quegli atti generosi di benefica Clemenza, che non sdegnaste d' esercitare verso di*

me,

me, allorchè ebbi l' onore, trattenendomi alla VOSTRA *Real Corte d' umiliarmi più volte tanto all' Eccelsa* VOSTRA *Persona, quanto a quella della Reale* VOSTRA FIGLIA, *a cui il Cielo aveva già partecipato l' eminente gloria d' unire sotto l' ombra degli invitti Gigli d' oro, e del Lauro sacro, e trionfale due delle più Auguste, ed immortali Prosapie. Piccolo è certamente il tributo, perchè maggiore non me lo permette il destino; ma sento nondimeno, che una dolce speranza*

mi

mi promette da un Cuore così magnanimo, qual è quello dell' ALTEZZA VOSTRA REALE, *un benigno compatimento. Permettetemi, Ve ne ſupplico, di ſecondare queſta innocente luſinga, mentre baciandovi col più profondo riſpetto l'Auguſta mano, compiſco i miei Voti col dichiararmi*

DI V. ALTEZZA REALE

Umiliſs. Divotiſs. Obbligatiſs. Servitore
Jacopandrea Tommaſini.

PREFAZIONE.

LE continue implacabili discordie, che dividono i Filosofi di qualunque ordine in occasione di esaminare quell' azione universale della materia, che Attrazione comunemente addimandasi, m' hanno reso fin da' miei più verd' anni irresoluto sulla scelta de' due famosi partiti, l' uno de' quali pretende, che tale Attrazione provenga da impulso, e che perciò debbasi riguardare come un principio meccanico; l'altro, che da niuna causa esteriore derivi, e però convenga come un principio immeccanico, ed inerente alla massa considerarsi. Da un canto io m'accorgeva, che qualunque fosse il principio impellente, siccome non si poteva fare a meno d' ammetterlo corporeo, non restava quieta la mente senza ricercarne la causa motrice, che ristorasse ad un tempo le perdite successive di moto accadute per il soffregamento della resistente materia; sicchè ne veniva l'inconveniente di dover supporre un altro motore corporeo secondario, e così all'infinito. Dall'altro canto mi sgomentava l' impossibilità di concepire, come, essendo due corpi posti in distanza, l' uno potesse agire sull' altro senza strumento alcuno intermedio per riuscirvi, e ciò tanto più poneami in angustia, perchè io m' accorgeva, che i più celebri, ed appassionati Attrazionisti riguardavano quest' obbiezione come un ostacolo insormontabile. La materia intanto in mezzo alle Filosofiche dissensioni proseguiva ad esporre tranquillamente indubitati segni di questa forza reciproca, e la Geometria dimostrava, che per il computo di essa unicamente, e non per altri mezzi, ottener poteasi l' intelligenza più facile, e più netta, e la soluzione più semplice, e piu universale de' più reconditi, e rilevanti fenomeni. Era dunque d' una massima importanza il trovare qualche plausibile uscita in tanta dubbiezza; ma come farlo? Miglior compenso scegliere a mio giudizio non si poteva, che, deposto ogni pregiudizio, ed ogni prevenzione, non muover passo, se non con la guida d' un rigoroso discorso consecutivamente

 con-

condotto, e stabilito sovra basi non vacillanti fino al conseguimento, se possibil fosse, del vero. Con questa precauzione io ho procurato di tentare in sì malagevole impresa le mie deboli forze, e per maggiore esattezza, e chiarezza insieme mi son servito d'uno stretto metodo matematico, cominciando dal definire le voci più importanti a fine d'evitare i contrasti, che provengono dall' affissare idee differenti all'istesse parole, e notando di mano in mano que' pensieri, e que' raziocinj, che piu probabili mi sembravano, ed al vero piu confacenti, finchè parmi d'esser giunto, se l'amor proprio non mi tradisce, ad appagarmi, almeno quanto basta, relativamente alle ricerche desiderate.

Ecco dunque come è nata quest' Opera, a cui ho procurato di dare quel finimento, che meglio per me potevasi, acciò portasse in fronte il titolo di Fisica Immeccanica, e che debbesi riguardare non come scritta per i sublimi Filosofi, ma come accomodata alla capacità della studiosa Gioventù: assai ricompensato stimandomi, se le mie lunghe, e laboriose meditazioni facili ad essa riusciranno, e fruttuose.

In tre Tomi dividesi tutta l'Opera, ed ogni Tomo in due parti. Nella prima parte del primo Tomo, rigettate le prove di coloro, i quali pretendono, che la materia risulti d' Enti semplici, ed inestesi, e dimostrato in più maniere, ch' essa non sia contro la comune opinione divisibile per natura all' infinito, si viene per necessaria conseguenza a determinare l'esistenza degli Atomi dotati d' un perfetto continuo. In questi Atomi poi dimostrasi, essere indispensabile una forza vicendevole, che non solo li mantenga al contatto, quanto ancora che operi in distanza, acciò restino adempiti i fenomeni, che in natura s' osservano; ed una tal forza, che da per tutto per mezzo dell' osservazione, e dell' esperienza si ravvisa, convincesi abbondantemente, che non può da veruno agente estrinseco riconoscer l'origine, con che resta finalmente stabilito, che debba essere annessa, ed intrinseca alla materia.

In tale occasione si tratta dello Spazio, e del Tempo, e rigettate tante razze romanzesche d' infiniti, s'ammette per solo infinito assoluto lo Spazio, il quale anche per tal proprietà non può confondersi col nulla positivo.

La seconda parte d'esso primo Tomo contiene un Trattato di Geo-

Geometria fublime per difporre le menti all' intelligenza de' Problemi, che ne' due Tomi fuffeguenti fi fcioglieranno. Forfe farà parere d'alcuni, che quefto Trattato fia troppo proliffo, o che poteffe tralafciarfi; ma motivi ben giufti a mio credere m' hanno determinato a quì collocarlo. Primieramente acciò i miei cortefi Lettori, che fuppongo a fufficienza informati delle fezioni Coniche, e delle quattro principali operazioni dell' Algoritmo, trovino in queft' Opera fenza ricorrere altrove tutto ciò, che è neceffario per facilmente comprenderla, giacchè le più belle cognizioni della Fifica non poffono andar disgiunte dalle più belle notizie della Geometria. In fecondo luogo volendo a norma de' più efatti Matematici, e fpecialmente de i fempre ammirabili Principj NEWTONIANI, fpiegar tutto geometricamente per maggior foddisfazione dell' intelletto fulla maniera rigorofa degli Antichi, oltre all' efporre più metodi a tal fine conducenti, parte de' quali fono ftati ricavati dall' Opere del Chiariffimo P. GRANDI, io ne metto in vifta de' nuovi, per difendere, ed incamminare alla perfezione gl' INDIVISIBILI, che hanno fortito la loro nafcita dalla gran mente del GALILEO, e che fono ftati pofcia tanto promoffi dal P. CAVALERIO, dal TORRICELLI, e dal DE ANGELIS, facendo conofcere, che fi poffono fovra di effi fondare con maggior ficurezza, chiarezza, e femplicità i principj del famofo Calcolo infinitefimale, che è tanto in ufo, le di cui primarie operazioni reftano in quefta occafione, fenza dover ricorrere alli fpazj defcritti, alle velocità, ed a' tempi, con ordine puramente geometrico dimoftrate. Sicchè quefto Trattato, oltr' all' efercitare la Gioventù, può fervirle d' introduzione a detto Calcolo, appianandole quelle difficoltà, e dileguandole que' fofpetti, che al di lui ingreffo comunemente s' incontrano, quando non fi vogliano mettere in conto i nuovi metodi, che fomminiftra. Al che aggiungafi, che effendo le Matematiche riputate da uomini dottiffimi come una cofa di mezzo tra la Metafifica, e la Fifica, fembravami, che quefto foffe il loro pofto conveniente.

Nella prima parte del fecondo Tomo, per affuefare la Gioventù alla Matematica mifta, fi confidera in primo luogo l' ipotefi particolare del moto uniformemente accelerato, e ritardato, da cui ricavafi il carattere della

Gravità presso alla superficie terrestre, cioè della Gravità Galileana; indi si passa a' metodi generali per trovare geometricamente gli spazj, i tempi, le velocità, e le forze in qualunque ipotesi di movimento.

Nella seconda parte dello stesso secondo Tomo dopo considerata la gravitazione reciproca, il peso, e il centro di Gravità vicino alla detta superficie terrestre, si tratta della Gravità agente a grandi intervalli, o sia della Gravità Newtoniana, assegnandone il carattere; e giacchè la Terra può supporsi sferica per la piccola diversità de' suoi grand' assi, s'applica tal carattere alle gravitazioni sì al di fuori, che al di dentro de' corpi sferici tanto omogenei, quanto risultanti di sfoglie sferiche eterogenee; nella qual' occasione dimostrasi, che i corpi tendono spontaneamente, per così dire, l'uno verso dell' altro, ma con una legge inviolabile, e però non dovendo l'uno tirar l'altro, svanisce la famosa obbiezione, con cui negasi la forza reciproca immeccanica della materia per la ragione che si darebbe azione in distanza. Siccome poi tre sono l'ipotesi di moto rettilineo, che cadono sotto la considerazione di dette gravitazioni sì fuori, che dentro de' corpi sferici, queste vengono non solo separatamente, ma promiscuamente ancora esaminate col titolo di forze centrali, per paragonare le velocità, e i tempi, tanto in caso che uno di tali corpi sia fisso, e l'altro mobile, quanto in caso che amendue siano mobili. In oltre dopo d'avere esposti alcuni sospetti sull' universalità della terza Legge Newtoniana riguardo alla Fisica immeccanica, si prendono ad investigare le forze, le velocità, e i tempi nel moto curvilineo; trasportate le quali teorie al moto de' Pianeti, e proposte in tal congiuntura alcune nuove riflessioni sul Sistema celeste in generale, si termina con stabilire l'origine della Gravità specifica.

La prima parte del terzo Tomo aggirasi sulle proprietà della Attrazione operante a piccoli intervalli; onde considerati primieramente i caratteri più generali delle forze attrattrici, si passa in seguito a trattare della loro diversa intensione, ed estensione; della maggiore, o minor forza della gravità rispetto a quella, con cui i solidi con i solidi, i fluidi con i fluidi, e i solidi con i fluidi stanno all'aderenza;

za; della misura delle forze attrattrici in generale, e loro paragone, dove dimostrasi, che elleno diversificano nel carattere dalla gravità: de' Mestrui chimici; delle forze attrattrici neutre; de' corpi mediatori; della diffusione de' fluidi; e di altre particolarità ad esse forze appartenenti. Quantunque poi vi sia poca speranza di poter rintracciare le leggi di queste forze, perchè per il loro troppo corto raggio d' attività far non si possono le debite osservazioni, nè impiegarvi replicate esperienze, nondimeno dal fenomeno de' tubi capillari, si può a mio credere molto probabilmente concludere, che una sola sia in loro la legge, per cui esse agiscano inversamente a' cubi delle distanze, benchè diverse tra loro, siasi provato, che esser possano tanto nell' intensione, che nell' estensione. Dal che vedesi, che basta una sola formula d' attività a comprendere le leggi tutte immeccaniche infuse da Dio nella materia; il che ci convince della massima semplicità, con cui essa tanto per l'adempimento de' suoi moti, quanto delle sue produzioni è nel suo genere costrutta, e regolata. Nè posso intanto tralasciar d'avvertire, ch'io non manco in varj luoghi di questa prima parte non solo di rispondere a molte forti objezioni, che sono state fatte contro l'esistenza dell'Attrazione, quanto ancora di far conoscere, che molto utile, anzi indispensabile è la notizia di questa forza per applicarne le proprietà alla scienza medica, a fine di ricavarne importantissime teorie.

La seconda parte di questo terzo Tomo abbraccia nella sua piccola estensione un esame della decantata Ripulsione; e giacchè oltre all' incontrarsi non poche difficoltà nell' adottarla, parecchj fenomeni, che vengono con essa spiegati, spiegar si possono coll' Attrazione, sene sospende l' assenso, finchè ne resti più sicuramente stabilita la realtà; essendo innegabile, che quando una cagione tra le cognite sia sufficiente a produrre un effetto fisico qualunque, non si deve per ispiegarlo ricorrere ad un' altra, che sia nel numero dell' incognite.

Questo è il prospetto in generale di tutta l' Opera, tralasciate varie particolarità, quantunque assai rilevanti, che troppo l' estenderebbero. Molte volte poi tanto le Proposizioni matematiche, quanto le Fisico-matematiche sono state da me dimostrate in più maniere,

per

per maggiormente appagare la ſtudioſa Gioventù ſulle verità, che contengono, e per incitarla con tal maraviglioſa coſpirazione all'acquiſto d'ulteriori cognizioni, non avendo mancato d'aggiungervi gli eſempj più facili, acciò ſulla guida di queſti ella poſſa farſi ſtrada a i più difficili.

Mi conviene talvolta attaccare, e ribattere l'altrui opinione, adducendone i miei da me creduti giuſti motivi; ma mi dichiaro, che non manco per queſto di conſervare tutta la ſtima, e di profeſſare tutta la venerazione verſo il merito raro, ed eminente di que' Valentuomini, a' quali m'oppongo, e che ſono della Repubblica Letteraria sì benemeriti. Io non pretendo, come dice il ſottiliſſimo LOCKE (*a*), d'inſegnare, ma di cercare la verità; onde laſcio al Pubblico il decidere a ſuo piacimento di queſta mia qualunque ſiaſi filoſofica fatica, egualmente felice riputandomi, ſe altri potrò per qualche verſo illuminare, o ſe da altri ſarò ne' miei traviamenti illuminato.

Bramerei per altro, che per la piena intelligenza delle coſe da me trattate foſſe da' miei corteſi Lettori baſtantemente ſcorſa queſt'Opera prima che ſi determinaſſero a formarne il giudizio; giacchè non ſi può ſempre o in un ſolo Paragrafo, o in un ſolo Capitolo abbracciar tutto, proibendolo molte volte il metodo, la difficoltà, e la ſeparazione de' ſoggetti diverſi; e poi poſſono, come è noto, ſovvenire, anzi ſovvengono di fatto nuove rifleſſioni in progreſſo, che di primo abbordo alla mente non preſentavanſi.

E quì prima di dar fine a queſta Prefazione, mi ſia permeſſo d'accennare, che l'Attrazione era cognita anco agli Antichi, come molto eruditamente avverte il celebre Giacomo KEIL, (*b*): ma il primo, che cominciaſſe a ridurla in qualche maniera a metodo geometrico, e che faceſſe intorno ad eſſa molte belle Eſperienze, fu il Canonico Donato ROSSETTI, come appariſce dalle ſue Opere, le quali per la loro rarità erano al vedere ignote all'illuſtre Pietro DE MARTINO; altrimenti egli non ne avrebbe certamente attribuito il pregio totale all'Inghilterra (*c*), togliendone la prima parte all'Italia ſua patria; la quale a diſpetto degl'invidioſi, che ne ſparlano, avrà ſempre la gloria d'eſſere ſtata maeſtra in Cattedra, e domatrice in Campo delle Nazioni.

I N-

(*a*) Entend. hum. Lib. II. Cap. XI. §. 17.
(*b*) Diſquiſit. de corporis animati vi attrahente.
(*c*) Inſtit. Phil. Nat. T. I. Cap. I. §. 27. & Cap. VIII. 139.

INDICE
DE' CAPITOLI
Contenuti nella Prima Parte.

IN-

INDICE
DE' CAPITOLI
Contenuti nella Seconda Parte.

ELEMENTI
DI
FISICA IMMECCANICA.

Nullius addictus jurare in verba Magistri,
Quo me cumque rapit tempestas, deferor hospes.

Hor. Epist. 1.

PARTE I.

CAPITOLO PRIMO.

Definizioni, Assiomi, e Supposizioni.

DEFINIZIONI.

I.

1. ER MATERIA intendo tutte le cose sensibili, o tutto ciò, che può in qualunque maniera far impressione su i nostri sensi.

II.

2. Per CORPO intendo una porzione di detta materia.

A 2 POS-

III.

3. POSSIBILE è ciò, che non implica contraddizione all' esistenza.

IV.

4. IMPOSSIBILE è ciò, che implica contraddizione all' esistenza.

V.

5. NECESSARIO è ciò, che ripugna, o che è impossibile, che non sia.

VI.

6. CONTINGENTE è ciò, che può essere, e non essere, ovvero ciò, che ripugna, o che è possibile, che non sia.

VII.

7. VERITA' è un rapporto necessario tra i termini d'una proposizione. In virtù di tal rapporto sono vere le proposizioni: *Il tutto è maggior della parte: Due, e due fanno quattro, &c.*

VE-

VIII.

8. VERISIMILE è ciò, che non mostra apparente contraddizione.

IX.

9. INVERISIMILE è ciò, che mostra apparente contraddizione.

X.

10. PROBABILE è ciò, che ammette ogni verisimiglianza.

XI.

11. IMPROBABILE è ciò, ch' esclude ogni verisimiglianza.

XII.

12. REALE, ASSOLUTA, O SOSTANZIALE dicesi una cosa, ch'esiste per se stessa; cioè, che si considera, come se avesse un' esistenza independente, e non come se fosse parte d' un' altra cosa.

RE-

XIII.

13. RELATIVA, o ACCIDENTALE diceſi quella coſa, che ſi conſidera non per ſe ſola, ma paragonata ad un' altra, dimodoche riguardata, e conſiderata in faccia all'altre, può al variar di queſte cangiarſi anche nella noſtra mente l'idea, ch' ella prima le ſomminiſtrava.

XIV.

14. ENTE, ENTI, ESSERE, ESSERI, SOSTANZA, SOSTANZE REALI, o POSITIVE chiamo tutte quelle coſe, che hanno un' eſiſtenza attuale, a differenza degli *Enti negativi*, che hanno ſoltanto l' eſiſtenza poſſibile.

XV.

15. ASTRATTO è un' operazione della mente, allorche ci rappreſentiamo una coſa, che conſideriamo da ſe ſola ſenza riguardo al ſoggetto, in cui riſiede.

XVI.

16. CONCRETO è quell' operazione mentale, allorquando conſideriamo una proprietà accompagnata col ſoggetto, che la poſſiede, o che la può poſſedere.

IN-

XVII.

17. INFINITO ASSOLUTO è quello, a cui non si può togliere, nè aggiungere cos' alcuna per alcun verso.

XVIII.

18. INFINITO RELATIVO è quello, che quantunque finito, dicesi nondimeno infinito riguardo all'enorme differenza, che corre tra esso, ed un' altra quantità, con cui si paragona.

COROLLARIO.

19. Quindi è, che in tal supposto può darsi l'infinitamente grande, e l'infinitamente piccolo, de'quali parlerassi a suo luogo.

XIX.

20. Per NATURA in generale intendo co' Platonici il divino magistero impiegato nella materia.

XX.

21. VOLUME, o MOLE d' un corpo dicesi la trina dimensione della sua grandezza.

MAS-

XXI.

22. MASSA, O QUANTITA' DI MATERIA di un corpo dicesi tutto il materiale compreso nel suo volume.

XXII.

23. LUOGO, SPAZIO, O VUOTO, dicesi ciò, che è suscettibile di materia; vale a dire ciò, che può darle ricetto riguardo alla collocazione.

XXIII.

24. MOTO, O MOVIMENTO è una mutazione successiva di luogo, o un' applicazione continua, e successiva del corpo fatta di luogo in luogo.

COROLLARIO I.

25. Dunque una cosa non può essere in due luoghi diversi tutt' alla volta; e però non può darsi in Natura il moto istantaneo assoluto, o perfetto.

COROLLARIO II.

26. Siccome ripugna che la Natura resti oziosa, dovrà succeder qualche cosa prima che un corpo possa giungere da un luogo a un' altro.

Sco-

S C O L I O.

27. Questa successione di cose può per comodo supporsi uniforme.

XXIV.

28. TEMPO chiamasi quest' uniforme successione di cose.

COROLLARIO.

29. Giacche il moto per la datane definizione (24.) è la misura dello spazio, ne segue, che lo spazio così misurato sarà maggiore, o minore, se l' istesso corpo durerà maggiore, o minor tempo a muoversi, cioè a misurarlo, e perciò il tempo è indispensabile nella misura dello spazio scorso.

XXV.

30. QUIETE, o RIPOSO è la permanenza di un corpo nel medesimo luogo.

S C O L I O.

31. Tanto si può dire col Malebranche, che la quiete sia un *quid negativum*, cioè una mancanza di moto, quanto che il moto sia una mancanza di quiete. In fatti dicen-

do, che il moto è una successiva mutazione di luogo, non si definisce altro, che un effetto visibile; come per un effetto visibile si definisce la quiete, dicendo, ch' è una continua permanenza nel luogo istesso, onde, come ho detto, tanto la quiete è una negazione del moto, quanto il moto della quiete. Aggiungasi per conferma, che essendo la materia indifferente tanto al moto, ch' alla quiete, come dimostreraffi in appresso, non si può dire, che l' uno dall'altra, o l' altra dall' uno derivino; Poiche se la quiete non tirasse la sua origine, che da una mancanza di moto, ne verrebbe, che non potrebbe un corpo trovarsi in quiete, se prima non fosse stato in moto, il che ripugna, potendo Dio collocare un corpo in perfetta quiete dentro lo spazio; così dicasi del moto. Le definizioni dunque del moto, e della quiete sono reciproche, e non esprimono altro che un fatto; e questo è quanto si sa in questo genere.

XXVI.

32. VELOCITA' è quella facoltà d' agire, per cui il corpo si va applicando successivamente da luogo a luogo nel dato tempo; vale a dire, è una relazione, che ha lo spazio scorso al tempo.

COROLLARIO.

33. Può dunque un corpo giungere da un luogo all' altro con varj gradi di velocità; cioè può consumare il dato spazio più presto o più tardi; ovvero può in diversi tempi scor-

ſcorrere il dato ſpazio; e perciò la velocità è indiſpenſabile come il tempo (29.) nella miſura dello ſpazio ſcorſo.

XXVII.

34. QUANTITA' DI MOTO è la velocità; diffuſa nella maſſa, cioè il prodotto della maſſa nella velocità; eſſendo evidente, che mentre muoveſi un corpo, tutte le ſue parti debbono muoverſi con l' iſteſſa velocità; altrimenti ſe alcune ſi muoveſſero più preſto, alcun' altre più tardi, il corpo ſi ſcioglierebbe, e non ſarebbe più intero contro l' ipoteſi.

XXVIII.

35. FORZA, AZIONE, IMPETO, POTENZA, ENERGIA &c. d'un corpo è quella quantità di moto, ch'egli attualmente eſercita, o ch' eſerciterebbe, quando tolto gli foſſe qualunque impedimento.

XXIX.

36. FORZA MOTRICE è quel principio, qualunque ſiaſi, donde proviene il movimento d' un corpo. Diceſi, comunemente *viva*, quando congiungeſi col moto attuale, come in un grave liberamente cadente. Diceſi *morta*, quando conſiſte nel ſolo sforzo di produrre il moto ſenza poter venire al moto attuale, come in una palla ſoſpeſa ad un filo, o poſta ſovra un ſoſtegno.

XXX.

37. MOTO EQUABILE dicesi, quando i corpi posseggono sempre la medesima quantità di moto; vale a dire, quando la velocità è costante.

XXXI.

38. MOTO VARIABILE dicesi, quando mutasi la quantità di moto, o coll' accrescersi, o col diminuirsi; vale a dire, quando la velocità è variabile.

XXXII.

39. MOTO ACCELERATO dicesi, quando la sua quantità, o quando la velocità in un corpo va continuamente accrescendosi.

XXXIII.

40. MOTO RITARDATO dicesi, quando la sua quantità, o quando la velocità in un corpo va continuamente diminuendosi.

XXXIV.

41. ESTENSIONE è ciò, che appartiene alla lunghezza, alla larghezza, e alla profondità, tanto unitamente, che separatamente considerate.

RE-

XXXV.

42. RESISTENZA è un' opposizione a qualche forza; ovvero è una potenza, che agisce contrariamente ad un' altra.

COROLLARIO.

43. Dunque ogni resistenza dovrà diminuire, o distruggere affatto l' effetto d' un' altra forza, o potenza.

XXXVI.

44. SOLIDITA' è un' estensione accompagnata con resistenza.

XXXVII.

45. COMPENETRAZIONE direbbesi quando due, o più corpi occupassero congiuntamente quel luogo, che uno di loro può separatamente occupare.

XXXVIII.

46. FIGURABILITA' è una particolar maniera, con cui resta una cosa circoscritta.

Co-

COROLLARIO.

47. Non può dunque tal carattere competere all'infinito assoluto (17.).

XXXIX.

48. DIVISIBILITA' è il discostamento di più cose poste al contatto.

COROLLARIO.

49. Nè meno questa proprietà può dunque competere all'infinito assoluto.

XL.

50. NUMERO è una moltitudine in generale, o in astratto (15.), che non ha significazione determinata, se non quando si applica a cose particolari, o al concreto (*16.*).

ASSIOMI, E REGOLE FONDAMENTALI.

I.

51. E' impossibile l'esistenza d'una cosa, che per esistere ammetta contraddizione, e ripugnanza; così non può una cosa essere, e non essere nel tempo istesso; non può esse-

essere ciò, che è, e ciò, che non è: vale a dire, non può essere una cosa, e nel medesimo tempo un' altra.

S c o l i o.

52. Questo assioma d'Identicità, ovvero (ciò, ch'è il medesimo) di contraddizione, è un principio universale, e incontrastabile, il quale, come avverte il Leibnizio nelle sue riflessioni sull'Intendimento umano di Locke (a), non ha bisogno di prova. Veramente intraprendendo a provare a forza di raziocinio proposizioni riconoscibili per semplice intuizione, si commette una *Tautologia*, cioè si replica inutilmente l' istessa cosa con parole diverse, si fanno petizioni di principio, o s' entra in un circolo vizioso.

II.

53. Niuna cosa può esistere, o accadere, ovvero debbesi ammettere, quando suppone indifferenza, ed eguaglianza di ragioni tanto per l'una, che per l' altra parte; cioè quando le ragioni sono eguali tanto perch'ella sia, quanto perch' ella non sia, e nessuna può prevalere sull' altra.

S c o l i o.

54. Suppongasi ex. gr. per un momento esistere un solo corpo; non si muoverà questo per alcun verso, perche tante sono le ragioni, per le quali deve muoversi per una par-

(a) *Leibnitii Epist. ad diversos per Christ.* | *Kortholt. vol.* 4. & *ult. pag.* 403.

parte, quante per qualunque altra; deve dunque necessariamente restare indifferente. Il simile dicasi con Archimede di due corpi eguali egualmente distanti dal loro centro di gravità, e ch' esercitano eguali momenti. Non v' è ragione più per l' uno che per l' altro, per cui seguir ne debba lo sbilancio, perche le medesime ragioni di preponderare, che ha l' uno, sono dalla parte dell' altro. Questo principio, che per promotore ha sortito il celebre Leibnizio, vien da esso chiamato *Ragion sufficiente*. Niuna cosa dunque, eccetto Dio, può aver l' essere effettivo, e reale senza una ragion sufficiente della sua esistenza; o pure tra l'infinite cose possibili non succederà mai, che una possa esistere preferibilmente ad un' altra, se a suo favore non ha una ragion sufficiente di tal esistenza. Vedasi il Wolfio nell' Ontologia Latina, e M. Formey [a], per conoscere l'importanza di questo principio, da cui essi pretendono, che provenga anche l' esposto d' identicità, e di contraddizione (51.).

III.

55. Gli effetti interi sono proporzionali a quelle cause, che agiscono sempre nell' istessa maniera.

COROLLARIO.

56. Dunque le forze, le potenze &c. che operano costantemente, essendo cause di cangiamenti prodotti in un dato

(a) *Mem. de l' Acad. Roy. des Sc. & bell. Lettr. de Berlin an.* 1747. *pag.* 370. *seq.*

dato tempo, possono esser misurate da questi effetti interi, cioè dalla quantità di moto, che in un dato tempo producono.

IV.

57. Non può essere infinita la serie successiva delle cause immediate, dalle quali vien prodotto un' effetto.

V.

58. Tutto ciò, ch' è contrario ad un' invitta esperienza, è assurdo.

VI.

59. Niuna cosa può aver creata se stessa, e una cosa creata non può dar del suo senza realmente perdere quanto dà; nè può accrescersi, senza prendere altronde con che farlo; altrimenti sarebbe creatura insieme, e creatrice, il che ripugna.

VII.

60. Il NULLA ASSOLUTO non ha, nè può avere proprietà alcuna, e però ripugna, che possa esistere.

VIII.

61. Non si debbono moltiplicare gli enti senza necessità, nè si deve supporre dall'Autor della Natura fatto per il più ciò, che far potevasi per il meno.

COROLLARIO I.

62. Dunque nella spiegazione degli effetti naturali non si debbono ammettere più cause di quelle, che sono sufficienti a produrli. Anzi, giacche una sola è la verità, non si debbono ammettere in tale spiegazione, se non quelle cause, che vengono comprovate per vere, rigettando non solo tutte le ipotetiche, e visionarie, che ripugnano; ma ancor quelle, che vengono proposte senza previa prova di raziocinio, o di esperienza, quantunque dimostrare non se ne possa la ripugnanza.

COROLLARIO II.

63. La Natura dunque sarà sempre semplice, e conforme a se stessa, non ridonderà di cause superflue, e non agirà mai inutilmente.

COROLLARIO III.

64. Quindi non si debbono attribuire a cause generali diverse i medesimi effetti. Ripugna ex. gr., che la Natura

per

per far cadere i corpi verſo il centro terreſtre, qualunque ſia il luogo, da cui liberamente diſcendano, ſi ſerva di cauſe differenti; onde gli effetti naturali della medeſima ſpecie riconoſcono l' iſteſſa cauſa.

Corollario IV.

65. Le ſpiegazioni dunque de' fenomeni, vale a dire di ciò, che accade in Natura, debbonſi far derivare da cauſe più generali, che ſia poſſibile, quando vi ſia il modo di farlo.

IX.

66. Quando in un gran numero di corpi d' ogni ſpecie poſti replicatamente alla prova ſi trovino coſtantemente proprietà ſottopoſte a leggi immutabili, queſte proprietà ſiſſar ſi debbono per univerſali, appartenenti cioè anche a quei corpi, ſovra de' quali non può cadere il noſtro eſame. Così può dirſi, che gravi ſiano ancora que' corpi, che ſono ſituati verſo il centro terreſtre, quantunque far non ſe ne poſſa la prova.

Corollario I.

67. Quindi deduceſi, quali debbono chiamarſi proprietà particolari, cioè quelle, che competono ſoltanto ad alcuni corpi in alcune circoſtanze.

COROLLARIO II.

68. Errore dunque ſarebbe il voler render generali quelle proprietà, che ad alcune ſpecie di corpi poſti in alcune circoſtanze convengono; e però deveſi far uſo cauto dell'analogia, di cui ſerveſi in alcuni caſi la Natura, e non generalizzarla ſenza fortiſſime ragioni.

X.

69. Nell'eſporre la ſpiegazione di qualunque dubbio deveſi evitare con ogni diligenza la realizzazione dell'idee aſtratte, e delle voci, nel qual difetto non ſon caduti ſoltanto i Peripatetici, e gli Scolaſtici, ma non pochi ancora de' moderni coltivatori della più ſana Filoſofia. A tal fine conviene uſare raziocinj corredati di vocaboli, de' quali ſi abbia un'idea chiara, e diſtinta, tralaſciando i raziocinj più compoſti, intralciati, ed oſcuri, particolarmente provenienti da un principio torbido, e inintelligibile, i quali per lo più ſono ſoggetti a tal realizzazione, e in conſeguenza a qualche equivoco, o a qualche ſofiſma; eſſendo più lodevole il confeſſare ingenuamente di non ſaper la cauſa d'un effetto, che il buttarſi all'impoſtura con fraudolenti, e miſterioſi diſcorſi, o per acquiſtar fama, o per favorire troppo appaſſionatamente un partito, o per ſecondare uno ſpirito di contraddizione proveniente da invidia, come pur troppo ſuole non di rado accadere.

Quan-

XI.

70. Quando una Propofizione è dimoftrata efattamente, fecondo tutte le buone regole, non fe le può negare l' affenfo per la ragione, che fe le poffano opporre alcune difficoltà, le quali non fiano folubili, o per mancanza d' ulteriori cognizioni, o per efferne totalmente inacceffibile la foluzione, purche non ne fia manifefta la falfità.

S c o l i o.

71. In fatti ciò, che è dimoftrato efattamente, è evidente, e in confeguenza una verità (7.); or ficcome la verità non può aver mefcolanza alcuna di falfità, ne fegue, che qualunque objezione, che ci renda infolubile un fenomeno, o molti ancora da tal propofizione non immediatamente dipendenti, non deve ridondare, fe non in colpa del noftro fpirito, che effendo limitato, non è capace di faper tutto. Ex. gr. dimoftrato che io abbia, che l' aria pefi, e che fia elaftica, non fono obbligato per conferma di quefta verità a fapere a quanto afcenda la fua forza di elafticità, o qual ne fia la caufa, ovvero fino a quanto efs' aria fia rarefcibile dal calore, e condenfabile dal freddo &c. Nel medefimo modo non fono obbligato a fciogliere tutte le objezioni contro la detta Propofizione; tanto più fe faranno fondate fovra fuppofti gratuiti. In fatti fe vi foffe tal obbligo, ficcome le objezioni poffono effere interminabili, una verità non giungerebbe mai ad effer perfettamente dimoftrata.

Ma

XII.

72 Ma quando da una Propofizione fi tireranno confeguenze, le quali facciano una chiara riprova d' errore, o di contraddizione, fi dovrà negar l' affenfo alla dimoftrazione d'una tal Propofizione, quantunque fembri concepita con tutta l' efattezza.

S c o l i o.

73. Eccone un efempio tolto dalle Matematiche. Sia l' Ellifle AB, il di cui femiaffe maggiore, come nella *Fig.* 1.; o minore, come nella *Fig.* 2., fia AC, ed il centro C. Da quefta col raggio CA defcrivafi il quadrante circolare ADC, e full' affe AC fi applichino verticalmente le PM, *pm*, PN, *pn*, terminate le prime alla curva Ellittica, le feconde alla circolare. Per la natura dell' Ellifle, e del Cerchio s' ha l'analogia DC:BC::NP: MP::*np*:*mp*, e così fempre; dunque per gli Elementi tutte le applicate del quadrante circolare, cioè tutta l' area ADC, a tutte l' applicate del quadrante Ellittico, cioè a tutta l' area ABC, faranno in ragione coftante, cioè come DC a BC. Suppongafi ora, che tutte l'ordinate fuddette fi rotino intorno all' affe AC; è manifefto, che da quefte rette fi defcriveranno innumerabili cerchj, che comporranno la folidità emisferica, e conoidea, le quali in confeguenza ftaranno fra loro come $\overline{DC}^2:\overline{BC}^2$; cioè ftarà l' emisfero alla conoide

ellit-

ellittica, come il quadrato dell' asse maggiore ellittico, al quadrato dell' asse minore nel primo caso, e viceversa nel secondo; il che s' accorda perfettamente con la misura, che può trovarsi con altri metodi, che s' esporranno.

Or s' è vero, che questi cerchj innumerabili formino le dette solidità, dovrà essere egualmente vero, che le loro estremità, cioè le loro periferie, mettano insieme le superficie d' essi solidi; onde tali superficie dovranno nascere dalla rotazione de' punti D, N, *n*, B, M, *m* &c. descriventi nel loro giro innumerabili periferie circolari; ma queste periferie circolari sono proporzionali a' loro respettivi raggi; dunque anch' esse dovranno star fra loro in una ragione costante, e perciò la superficie emisferica nata dalla revoluzione del quadrante circolare ADC, starà alla superficie conoidale resultante dalla revoluzione del quadrante ellittico ABC, amendue intorno l' asse AC, come la DC alla BC.

Questa dimostrazione sembra esattissima all' evidenza; ma se qualcheduno si prenderà il pensiero d' esaminarne il resultato, troverà esserne erronea la misura, e non istare le dette superficie nell' esposta ragione; tanto più che se questa fosse vera, ne verrebbe facilmente sì la rettificazione di qualunque arco circolare, e in conseguenza la quadratura di qualunque dato settore di cerchio, come ancora la rettificazione della Parabola Apolloniana, e in conseguenza la quadratura dell' Iperbole pure Apolloniana [a]; misure, che passano almeno co' metodi presentemente noti per disperate, ed in specie la quadratura del cerchio [b]. Tutto questo ho detto

(a) *Vedasi Hugen. Opera varia T. 1. Horolog. Oscill. Prop. 9. pag.* 103. *Lugd. Bat.* 1724.

(b) *V. Joh. Bernoulli Opera omnia T.* 4. *n.* 170. *pag.* 172.

to, perche quantunque sia il presente Assioma per se evidentissimo, non viene nondimeno talora atteso, o per negligenza, o per prevenzione.

Corollario.

74. Per assicurarsi dunque della verità d'un Teorema, è bene il procurare di dimostrarlo in più maniere, per vedere, se regge alla riprova, e se tutte le conclusioni cospirano nel medesimo fine. Devesi ancora tentarne la dimostrazione inversamente quando sia possibile; adoprare in somma, per servirmi de' termini Logici, il metodo analitico egualmente, ed il sintetico; e se questi ben maneggiati vengono all'istessa conclusione, non v'è più obbligo di maggiormente assicurarne la verità.

Supposizioni.

I.

75. La Materia è mobile.

II.

76. La Materia è estesa.

III.

77. La Materia è resistente.

La

IV.

78. La Materia è figurabile.

V.

79. La Materia è divisibile.

S C O L I O.

80. Tutto ciò insegnaci una continua immancabile esperienza fin dall'infanzia; onde conviene per necessità concederne almeno l'apparenza. Si vedrà in seguito, se questi caratteri saranno tutti realmente veri, o se ve ne sarà qualcheduno affatto apparente. Circa al moto niuno in oggi ne dubita. Tra gli Antichi andavano in giro contro la sua esistenza varj sofismi. Diodoro Crono faceva il seguente. Ciò, che si muove, o si muove nel luogo, dove è, o nel luogo, dove non è. Se il primo, non esce dal luogo, che occupa, e perciò non si può muovere; se il secondo, ne viene un manifesto impossibile; dunque non si dà il moto. A questo ragionamento è molto facile il rispondere; perche il corpo non si muove nel luogo dove è, nè in quello dove non è, ma successivamente da luogo a luogo (24.). Venne peraltro molto a proposito un'occasione, in cui il detto Filosofo restò convinto; poiche ricorso, per essersi slogata una spalla, al Medico Ermofilo, questi li rispose, facendoli lo stesso argomento, che tal pretesa slogazione era impossibile; ma Diodoro Crono vinto dal dolore lo pregò, che, lasciate tali arguzie, li riponesse la spalla smossa al suo luogo.

Melisso Scolaro di Parmenide persuaso, che un corpo non si poteva muovere senz'ammettere il vuoto, e non potendo concepirlo, si buttò a negare addirittura il moto, facendo prevalere il raziocinio all'evidenza.

L'argomento più famoso era quello, che faceva Zenone, ed a cui dava il nome d'Achille. Egli supponeva, che una Testuggine, ed Achille lontano un miglio da essa si partissero amendue nell'istesso tempo per arrivare a un termine prefisso, ma che Achille si muovesse con una velocità cento volte maggiore, e sosteneva, che Achille non avrebbe mai raggiunto la Testuggine; imperciocchè mentre Achille avesse descritto un miglio, la Testuggine non ne avrebbe consumato, che una centesima parte, e quando il primo avesse scorso questa centesima, il secondo ne avrebbe trapassato una centesima di centesima; onde andando avanti con tal progressione all'infinito, la Testuggine avrebbe sempre fatto in tempi eguali un viaggio cento volte minore d'Achille, il quale in conseguenza non avrebbe mai potuto raggiungerla. A questo ragionamento più sottile, e più ingegnoso de' precedenti, che sembra distruggere l'idea, che abbiamo del moto, e per sciogliere il quale gli Scolastici hanno scritto interi Trattati, si risponde in oggi molto facilmente, dimostrandosi per la dottrina delle serie, che Achille avrebbe raggiunto la Testuggine dopo d'aver fatto un miglio, ed una novantanovesima parte di esso. Tali sofismi possono leggersi in Plutarco [a], e in Sesto Empirico [b] più per curiosità, che per utile.

CA-

(a) *De placitis Philosophorum lib. 1. cap. 19.*

(b) *Adversus Mathem. lib. 9. de motu; Adversus Phys. lib. 2. Hypotyposis Pyrrhon. lib. 2. Cap. 22. & lib. 3. Cap. 8.*

CAPITOLO SECONDO

De' Caratteri generali della Materia.

* * * * * * * * * * * *
* * * * * * * * * * *

PROPOSIZIONE I.

81. L*A Materia è impenetrabile.* Se si compenetrasse, ogni sua porzione, ovvero ogni corpo, di qualunque volume si concepisse, si potrebbe ridurre in uno spazio minore d'ogn' assegnabile (45.); ma ciò ripugna ad un' invitta esperienza; dunque (58.) è manifesta la Proposizione.

S C O L I O I.

82. Mescolandosi due fluidi, vedesi diminuirsene bene spesso, e talvolta accrescersene il volume totale, come può riscontrarsi dall' Esperienze del celebre M. de Reaumur [a], come ancora da quelle di Haan, e di altri da quest' Autore riportati [b]; Ciò per altro non si oppone alla verità della presente proposizione, perche in ogni tal mescolanza le condensazioni, o le rarefazioni de' miscibili hanno un limite particolare; segno evidente, che ciò non procede dal-

D 2 la

(a) *Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc. an.* 1733.

(b) *Diss. de efficacia mixtionis in mutandis corporum voluminibus.*

la materia, che si va compenetrando, o che compenetrata va rarefacendosi, ma da alcune circostanze molto diverse, che sannosi da' Fisici, e che non è questo il luogo d' esaminare. Aggiungasi, che tali fenomeni non succedono nella mescolanza di qualunque corpo con un' altro, ma d' alcuni soltanto, i quali perciò suppongonsi con tutto il fondamento dotati di qualche particolar proprietà. Il medesimo dicasi de' corpi, che crescono di peso per mezzo della calcinazione; sovra di che merita d' esser letta la Dissertazione del P. Beraut Gesuita inserita nel Magazzino Toscano [a].

SCOLIO II.

83. Alcuni Filosofi, particolarmente Newtoniani, confondono l' impenetrabilità, e la solidità; o pure deducono immediatamente questa da quella. Altri suppongono addirittura la solidità, come un carattere intrinseco, e necessario della materia; ma prima di poter ciò stabilire, parmi, che vi siano de' passi di mezzo da fare, convenendo dimostrare l' insussistenza d'alcuni Sistemi, co' quali i loro Autori pretendono provare, non esser altro la Materia, ch' Enti inestesi, e senza parti, o punti simili al punto matematico &c., a i quali regalano gratuitamente varie proprietà, per poi dedurne la spiegazione de' fenomeni, che osservansi in Natura. Rigettati tali Sistemi, allora ne può venir la conseguenza legittima, che la materia sia solida per natura. Sia pertanto.

PRO-

(a) *Tomo 1. pag. 196. e seg.*

PROPOSIZIONE II.

84. *Enti semplicissimi, privi totalmente d'estensione, non possono con la loro unione formar la Materia.*

Se di tali Enti fosse composta la materia, ogni molecola elementare, da cui risulta un corpo, verrebbe formata da due, o più Enti messi insieme; in conseguenza non vi sarebbe corpo, che alternativamente non fosse risolubile in essi. Mi si dovrà dunque concedere, ch' io possa supporre una molecola, o porzione corporea dell' estrema piccolezza, la quale divisa per l' ultima sezione cessi d' esser materia, risolvendosi in due de' menzionati Enti semplici. Non mi si potrà in oltre negare, che per formar di nuovo, o ricomporre detto piccolissimo corpicello, basti riunire i detti due Enti semplici separati. Si riuniscano adunque; dovranno, benche inestesi, produrre estensione, col fare scaturire dal loro accoppiamento il detto corpicello. Preso pertanto un punto fisso nel loro attacco, vi dovrà esser da destra, e da sinistra il carattere di commensurabilità; altrimenti il corpo natone, non essendo esteso, nè figurabile, &c., non sarebbe corpo (76.78.); ma i due Enti accoppiati non possono essere nell'atto del loro combaciamento, se non della medesima natura di prima, giacche la sola mutazione di luogo non può nulla influire sulla loro essenza; dunque saranno nel tempo stesso estesi, ed inestesi; figurabili, e non figurabili &c., il che è una contraddizione ne' termini. Il medesimo vale, se più di due Enti v' abbisognino per la formazione d'un corpuscolo. Aggiungasi, che essendo inestesi,

do-

dovranno ancora esser penetrabili, posto, che vengano uniti insieme, ovvero che si tocchino; poiche non essendo a tal compenetrazione impedimento alcuno, ella deve necessariamente seguire; sicche un numero anche infinito di essi non giungerebbe mai a formare un corpuscolo minore d' ogni assegnabile. Resta dunque (51. 81.) dimostrata la Proposizione.

S c o l i o.

85. L' illustre Leibnizio inteso sempre a segnalarsi con qualche bizzarro letterario progetto, per dimostrare l' esistenza delle mostruose sue *Monadi*, si servì d' un raziocinio simile a quello, che leggesi nel famoso Locke riguardo all' estensione. „ Se taluno (questi dice) mi dimanda, cos' è „ questo spazio, di cui favello, io son pronto a dirglielo, „ quand' egli mi dirà, cos' è l' estensione. Poichè il dire, „ come per l' ordinario suol farsi, che l' estensione consiste „ in avere *partes extra partes*, è l' istesso che dire, che „ l' estensione è estensione „ &c. [a]. Così il Leibnizio dimanda, di che cosa è composta la materia? A risponderli, ch' è composta di particelle materiali, si viene a dire, egli segue, che la materia è composta di materia, il che è il medesimo che non dir nulla.

Pretende egli dunque con la sua *Ragion sufficiente* alla mano (54.), che non si possa trovar ragion d' un Ente esteso, e composto, se non in Enti semplici, ed inestesi nel modo medesimo, che per provar la possibilità d' un' orologio, bisogna venir a cose, che non siano orologio.

Da

(a) *Entend. Hum. liv.* 2. *Chap.* 13. §. 15.

Da questo principio deduce, che per conoscer la materia, bisogna ricorrere a ciò, che non è materia, cioè ad Enti semplici, privi affatto d'estensione, e quest' Enti arbitrarj chiama col suddetto nome di *Monadi*. In occasione che l'Accademia Reale delle Scienze, e Belle Lettere di Berlino propose per soggetto del premio dell' anno 1747. l'esame di queste *Monadi*, molti furono ad esse contrarj, tra' quali il famoso Matematico Eulero (a), sembrando anch'ad esso repugnante la loro esistenza. Parmi per altro, che si possa con tutta giustizia dubitare, o che il medesimo Leibnizio tenga per falsa questa sua Ipotesi, o che si contraddica; imperciocchè io non credo, che vi sia persona, la quale mi neghi, che Enti senz' estensione, non siano tanti infinitamente piccoli pretti, e reali; ma una quantità infinitamente piccola presa in senso stretto filosofico è al parere del medesimo Leibnizio una pura, e pretta finzione (b); dunque o egli propone soltanto per bizzarria le Monadi, e però non ne crede l'esistenza; o pure si contraddice. L'Ellero al contrario (c) non potendo concepire le Monadi Leibniziane, che chiama punti Metafisici, pretende con altrettanta stravaganza, che sia più facile il comprenderle sotto Enti semplici materiali non estesi, l'unione de' quali abbia potuto formare particelle corporee, e in conseguenza estese. Ma questa ragion sufficiente parmi, con pace de i Leibniziani, in questa occasione male impiegata; primieramente perche si raggira sovra un supposto non provato, e forse falso, come si ve-

(a) *V. Journ. des Sav. avril* 1748. *p.* 465. *Edit. d'Amsterdam.*

(b) *Essai de Théodicée* §. 70.

(c) *Mem. de l'Acad. Roy. des Sc. & Bell. Lettr. de Berlin. an.* 1746. *Diss. seconde sur les Elemens.*

vedrà in appresso, cioè che la materia sia per natura composta, o mista. In fatti il dire col Leibnizio (a), che è composta, perchè flessibile, e divisibile, non è prova sufficiente; bisogna provare, che questa flessibilità, e questa divisibilità non sono apparenze, e per provarlo bisogna far vedere, che la flessibilità non può procedere da' corpi duri sdrucciolanti l'uno sull'altro, o l'uno dall'altro discostantisi; e che la divisibilità succeda non da un semplice scostamento di detti corpi duri, ma da una divisione a tutta sostanza. In secondo luogo, se la ragion sufficiente s'impiega direttamente per giungere dal corpo alle Monadi, si deve potere anche inversamente adoprare, per ritornare dalle Monadi al corpo (74.). Or se domando a' Leibniziani, qual sia la ragion sufficiente, per cui Enti inestesi, e senza parti debbano uniti insieme formar parti, ed estensione, essi certamente non potranno fare a meno di confessare di non saperla, nè di poterla intendere col menzionato Eulero; ma io ho dimostrato, se non m'inganno, che il raziocinio inverso non regge (84.); dunque erroneo deve esser nel presente caso anche il diretto, quantunque apparisca sotto la larva di verisimiglianza (72.73.); e però il metodo della ragion sufficiente è stato, torno a dire, male impiegato, come quello, che fondasi sovra un supposto non dimostrato, e che, se non erro, non proveranno giammai. Passiamo adesso ad un altro somigliante Sistema, ma prima si premetta

LEM-

(a) *Epist. ad diversos per Christ. Kortholt.* | *Vol.* 4. *& ult. pag.* 407.

LEMMA I.

86. *Non è possibile l' esistenza d' una quantità, che sia un infinitamente piccolo assoluto.*

A voler, ch' esista un infinitamente piccolo assoluto, bisogna supporre, che questo sia l' ultimo termine d'una serie successivamente decrescente all' infinito; perche se non fosse l' ultimo termine, ve ne sarebbero de' più piccoli, contra l' ipotesi; ma repugna, che si termini l' interminabile (51.); dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO.

87. Gl' INFINITAMENTE PICCOLI, O INFINITESIMI de' Matematici sono dunque tutti relativi (13.); potrebbero per altro chiamarsi più giustamente *inassegnabili*, come quelli, che vengono supposti d'una piccolezza tale, che trascenda la piccolezza di qualunque misura, di cui si possa far uso.

LEMMA II.

88. *Dall' estensione all' inestensione passa una disparità, che non ha rapporto possibile.*

Se si desse il passaggio dall' estensione all' inestensione, non vi sarebbe altro compenso, che supporre l' estensione divisibile all' infinito; ma per quanto dividasi mentalmente un' estensione in parti decrescenti, e ciò successivamente all' infinito, è chiaro, ch' ogni porzione di tal serie, come

parte d' estensione, sarà sempre estesa ancor' essa; onde l'estensione non potrà mai giungere ad essere inestensione, se non venga con la replicata sezione affatto distrutta; cioè se non diventi in qualche sua parte un infinitamente piccolo assoluto, giacche non può questo concepirsi, se non inesteso; Ma l' infinitamente piccolo assoluto non è possibile (86.); dunque l'estensione per quanto si diminuisca, non può divenire inestensione, e però tra l' estensione, e inestensione è impossibile il rapporto; il che &c.

PROPOSIZIONE III.

89. *Quando si concedesse, che esistessero punti reali simili a' punti matematici, cioè senz' estensione, i quali punti per salvar la compenetrazione non potessero giammai per un impedimento qualunque giungere a toccarsi, ma che con lo stare avvicinati in varj volumi formassero i corpi; dico, che non si potrebbe dare in essi moto alcuno, e perciò sarebbe il lor sistema insostenibile.*

Immaginiamoci, che un punto, cioè un Ente inesteso abbia, se pure è possibile, scorsa col moto (24.) una distanza qualunque: egli sarà passato successivamente per tutte le possibili intermedie porzioni di essa; ma queste porzioni non rimangono se non estese, quantunque la detta distanza suppongasi divisibile all' infinito (86.); dunque un tal punto avrà dovuto nell' addotto caso adattarsi sempre sovra porzioni di distanza, cioè sovra porzioni estese (41.); ma il punto si suppone realmente inesteso; dunque una cosa inestesa si sarebbe replicatamente distesa, e adattata sovra un' esten-

sio-

fione, e però tra 'l punto, e l'eftenfione vi farebbe commenfurabilità, e rapporto; il che è falfo (88.); dunque il punto in queftione non può fcorrer col moto, cioè con la continua e fucceffiva applicazione di eftenfione a eftenfione, una diftanza qualunque finita, per quanto piccola voglia immaginarfi, e perciò non può effer giammai fufcettibile di moto alcuno; ma ciò, che s'è detto d'un folo punto, fi può dire di due, e di più altri; tantopiù, che per effer fempre l'uno dall'altro in qualche diftanza, le circoftanze confiderate in uno vagliono per tutti gli altri; dunque è manifefta la Propofizione.

S c o l i o.

90. Autore dell'addotto fiftema è il celebre P. Bofcovich; quefto valente Geometra pretende, che fin dall'infanzia, ed anche fin dal tempo, in cui dimoriamo nell'alvo materno, c'ingannino i fenfi col farci apparire la materia ben diverfa da quello, ch'ella è realmente, prefentandocela all'immaginazione come dotata di folidità; qual pregiudizio refta in feguito in noi confermato per la coftante introduzione della medefima idea, fe non facciamo un ufo debito della rifleffione. Egli dunque crede, che giunti ad un'età capace di riconofcere i pregiudizj dell'infanzia, pofta all'efame ogn'origine delle noftre idee, e coftituito l'animo in un'intera independenza, ci debba faltare agli occhj, che non v'è il minimo inconveniente a fupporre, che la materia confti di punti totalmente indivifibili, privi d'eftenfione, e di parti. Per concepir poi tali punti, foggiunge, che ci può

ſervir di guida il punto matematico. *Punctorum mathematicorum idea, quam nobis in Geometria efformamus, opem feret* [a]. Ma il pretendere, che noi concepiamo Enti ineſteſi reali per la ragione, che paſſiamo ſovra il punto matematico, allorche aſcoltiamo i Geometri, è un abuſarſi della noſtra condeſcendenza preſtata a ſolo fine di laſciar fare ad eſſi il lor giuoco, qual è la miſura dell'eſtenſione; tantopiù che non porta a neſſuna conſeguenza per il fine prefiſſo il conceder loro il punto indiviſibile, e ineſteſo, il quale per altro vien giudicato da chi ben vi riflette un ripiego per *metodo*, e per *comodo*. Per *metodo*, perche pretendendo i Geometri di paſſare conſecutivamente da una coſa all' altra, e concatenando così le loro idee aſtratte, per poi applicarle al concreto, hanno fiſſato il punto ineſteſo, il quale col fluſſo produca la linea, ch' è una lunghezza ſenza larghezza; così la linea ſcorrendo ſovra un' altra linea, forma la ſuperficie, ch'è una larghezza accompagnata dalla larghezza ſenza profondità; e finalmente la ſuperficie, collo ſcorrere ſulla linea, produce il ſolido dotato di lunghezza, larghezza, e profondità; in grazia adunque di venire per conſeguenze alla naſcita della linea, della ſuperficie, e del ſolido, hanno fiſſato per primo elemento il punto ineſteſo. Per *comodo* poi l' hanno anche ſuppoſto tale, perche hanno voluto ſchivare ogni contraſto, allorche ex. gr. hanno avuto biſogno di tirare una linea da un punto ad un altro; perche ſe il punto aveſſe avuto eſtenſione, biſognava fiſſare da qual parte di tal eſten-

(a) *Diſſert. de materiæ diviſibilitate & principiis corporum.* §.17. *V. Mem. ſovra la Fiſica, e Iſtoria naturale di diverſi Valentuomini T.* 4. *pag.* 161.

estensione si doveva cominciare a condurre la detta linea. In oltre se il punto fosse stato esteso, la linea sarebbe stata prodotta non tanto lunga, quanto larga, ed eccoci ad altri inconvenienti, che s' attraversavano al loro fine, qual era di considerare alle volte una sola distanza, vale a dire una sola lunghezza, una sola larghezza, o una sola profondità, senza pensare nell' atto medesimo ad altre dimensioni. Vedendosi dunque qual sia stato il fine di supporre il punto inesteso, cioè il metodo, e il comodo, non parmi legittima induzione di pigliar motivo da una cosa non solo totalmente chimerica, ed inintelligibile, ma anche impossibile, per concepirne, e stabilirne una simile, che non solo si vuol possibile, ma realmente esistente.

91. Nemmeno so come possa il sovrallodato Autore supporre con altri (a), che il punto col flusso continuo generi la linea, la quale non sia composta di punti, ma che sia terminata da i punti. In fatti niuno può negare, che la linea non sia composta; altrimenti ella sarebbe le veci del punto, cioè del primo elemento nel Mondo matematico; dunque o è composta d' altre linee, o di punti; il primo è un supporre ciò, ch' è in questione; dunque sarà vero il secondo. Ma ecco un altro scandalo; se la linea è composta di punti, saranno questi posti l' uno accanto all' altro; or se ciò fosse, si verrebbero a compenetrare per essere inestesi, e non potrebbero in conseguenza produrre la linea. Nemmeno si può concepire, che il flusso del punto generi la linea, se egli non vassi, per così dire, continuamente squagliando per il lungo, ed allora non sarebbe più inesteso; il so-

(a) V. Pietro de Martino *Phil. Nat.* | *Instit. lib. I. Cap. VI. §. 108. pag. 57.*

solo passeggio del punto non può nemmeno formar la linea, come il moto d' una palla di legno non può formare il bastone. Aggiungasi, che non si può accordare, ch' una cosa inestesa sia capace d' un continuo successivo combaciamento con ciò, ch' è esteso (89.); ovvero ripugna, che ciò, ch' è inesteso, produca l' estensione, giusta l' antico verissimo assioma, *nemo dat quod non habet*. Sia poi la linea non composta di punti, ma terminata da' punti; siccome il flusso d' un solo punto è quello, che la produce, bisognerà dire, o che il punto generi un altro punto a se eguale, e ciò nel fine del suo moto, e non altrove; ovvero ch' esista in due luoghi diversi tutt' alla volta; amendue inconvenienti (59.25.).

92. Mi sarà opposto, che il Cav. Newton, con i moderni Geometri considera la linea constante di linee, la superficie di superficie, il solido di solidi. Al che rispondo, che altro è dividere un solido, una superficie, una linea in parti omogenee inassegnabili per comodo di calcolo, altro è ricercarne la genesi. Nel primo caso quando si dice, che la linea consta di piccolissime linee, la superficie di piccolissime superficie, il solido di piccolissimi solidi, si considerano queste quantità come tali, a fine d' adattarvi il metodo degli evanescenti, il quale fondamentalmente non differisce dal metodo degl' Indivisibili [a], come farò vedere in progresso. Nel secondo caso non si pensa più al comodo del calcolo, ma

(a) *V.* M. Deidier nella Prefazione all' Opera intitolata: *la Mesure des Surfaces & des Solides par l'Aritmetique des infinis & les centres de gravité. La Mechanique générale livre I. Chap. III.* §. 56. Lecchi *Elem. Geom. Theor. & Pract. T.* 2. *pag.* 185. *seq.*

ma ad una serie successiva di produzioni; ed allora il dire, che la linea è composta di linee, la superficie di superficie, il solido di solidi, è il medesimo, che non dir nulla, come nulla si direbbe, pronunziando, che il punto consta di punti.

93. Se poi mi fosse richiesta la definizione del punto matematico, io direi col Newton; il punto è una quantità per ogni verso evanescente; ovvero una quantità la minore per ogni parte d'ogni assegnabile (87.), e perciò si può riguardo al nostr' uso fissare come inestesa, quantunque per se stessa realmente contenga estensione; ed allora cesserebbero le risse, e s' intenderebbe assai meglio come potesse nascerne, o la linea, o la superficie, o il solido; imperciocche fissato, che il punto debbasi concepire come una quantità estesa per le tre dimensioni, ma d' un' estensione affatto inassegnabile per ogni verso, la linea, ch' è composta di tali punti posti l' uno accanto all' altro, consterà d' una lunghezza assegnabile, e d' una larghezza, e profondità inassegnabili; la superficie, che vien formata dall' unione di linee innumerabili poste l' una accanto all' altra, risulterà di lunghezza, e larghezza ambe assegnabili, e d' una profondità inassegnabile il solido, che proviene da innumerabili superficie combaciantisi esattamente, possiederà le tre dimensioni, cioè lunghezza, larghezza, e profondità, tutte assegnabili.

94. Se fosse obbiettato, che tal definizione risguarda più il punto fisico, che il matematico; rispondo, che la quantità matematica non differisce dalla fisica, se non in prescindere da ogn' altra proprietà, che può competere alla materia, ritenendo soltanto l' estensione; in fatti le figure matematiche non sono state immaginate, se non coll' innanzi

del

del corpo fisico, e questo a fine di stabilire le regole della dimensione, per poi adattarle al materiale. Posto ciò, è chiaro, che astraendo dal punto fisico ogn' altro carattere, fuorche un' estensione per ogni verso egualmente inassegnabile, si viene addirittura alla fissazione del punto matematico.

95. Ma ritornando in via, concludo, che non essendo in senso stretto nè concepibile, nè possibile il punto matematico realmente inesteso, e dovendo questo servir d'ajuto a comprendere i punti Boscovichiani, tali punti non saranno per questo verso nè concepibili, nè possibili. Siccome poi questo sistema è una pura Ipotesi, non meriterebbe, come tale, maggior riflessione (62.); ma il suo illustre Autore pretende dimostrarne anche direttamente la verità, e ciò per un principio messo in campo anche da altri, voglio dire per la *Legge di Continuità*. Mi riserberò dunque a far vedere a suo luogo, che questo principio è, riguardo al moto, e alla quiete, insussistente. Chi poi vuol vedere il detto sistema nella sua estensione, può rincontrarlo in varie Opere del dottissimo Autore, come nella Dissertazione *de Lumine*, in quella *de materiæ divisione*, *&* *principiis corporum*; nell'altra *de Lege Continuitatis*, *&c.*

PROPOSIZIONE IV,

96. *La Materia è solida*.

La Materia è impenetrabile (81.), in conseguenza è resistente (42.); non risulta d' esseri inestesi (84.89.), e perciò è realmente estesa; ma l'estensione accompagnata con re-

resistenza è ciò, che chiamiamo solidità (44.); dunque la materia è solida; il che &c.

PROPOSIZIONE V.

97. *La Materia è indifferente tanto al moto, ch' alla quiete.*

Se la materia tendesse al moto, non vi sarebbe corpo, che posto sovra un piano ben levigato non si muovesse spontaneamente, e in conseguenza non si darebbe quiete, se non coartata, il che è falso.

Se la materia tendesse alla quiete, non si potrebbe trasportare un corpo da un luogo a un altro col solamente sorreggerlo, perche si muoverebbe spontaneamente verso quel luogo, dove trovavasi in quiete, il che è contrario all' esperienza.

Dunque, essendo la materia suscettibile tanto di moto, che di quiete, e non tendendo spontaneamente, allorche si trova in uno di questi due stati, allo stato opposto, ne segue, ch' essa è indifferente all'uno, ed all'altro; il che &c.

PROPOSIZIONE VI.

98. *La Materia per se stessa deve rimanere in quello stato, in cui trovasi, o di moto, o di quiete, fintanto che da una causa, qualunque siasi, non ne venga rimossa.*

1.) Supposta la materia in quiete senza verun agente, che la disturbi, siccome non v' è ragione, per cui debba muoversi più per un verso, che per un altro, deve neces-

fariamente rimanere nel fuo ftato d' immobilità (53. 54.).

2.) Suppolta in moto, ficcome per l' ipotefi non v' è caufa, nè ragion veruna, per cui debba mutar direzione più per una parte, che per un' altra, e ficcome è indifferente al moto, e alla quiete, dovrà mantenere coftantemente la detta direzione, e il moto, che poffiede.

3.) Che fe fopraggiunga qualche caufa fufficiente ad alterare quefte fituazioni, è manifefto per la fua natural difpofizione alla mobilità (75.), e per la fua impenetrabilità (81.), che dovrà neceffariamente feguirne il cangiamento, come in fatti fuccede; con che refta dimoftrata la Propofizione.

S C O L I O.

99. Che la materia debba perpetuamente mantenerfi nello ftato di quiete, quando non vi fia caufa, che da tale ftato la rimuova, lo dimoftra anche l'efperienza. Parimente, che la materia debbafi perpetuamente mantenere nello ftato di moto equabile, quando da qualche caufa non refti alterata, rifcontrafi da un corpo moffo fopra un piano levigato; imperciocchè è offervazione immancabile, che quanto maggiore farà tal levigatezza, tanto più lungamente il corpo conferverà lo ftato del fuo movimento; profeguendo dunque in tal guifa il difcorfo, quando il piano foffe perfettamente levigato, il moto per effo fi manterrebbe uniforme, e perpetuo; ma lo fpazio fa le veci d' un piano perfettamente levigato; dunque un corpo meffo in moto nello fpazio fenza l' incontro di caufe perturbatrici dovrà invariabilmente perpetuarlo.

Co-

COROLLARIO I.

99. b. Dunque un corpo nel rimanere immobile nello ſpazio, vi reſta indifferente ad ogni direzione, e però non eſercita da ſe ſolo forza alcuna per mantenervisi; il che dimoſtra, che la ſola quiete non può mai paſſare per una forza, come credeva il Des-Cartes.

COROLLARIO II.

100. Giacche un corpo, che muoveſi per una Curva, deve mutare ogni momento direzione, è manifeſto, che richiedeſi a tal fine più d' una forza operante per direzioni diverſe, e che in conſeguenza non può un ſolo agente produrre un tal effetto.

PROPOSIZIONE VII.

101. *Suppoſta la Materia diviſibile all' infinito, non ſi potrà ſupporre attualmente diviſa in infinito ſenza annichilarla.*

Se dopo tal diviſione la materia eſiſteſſe, non ſarebbe più diviſibile in infinito contro l'ipoteſi; ma non può nemmeno ridurſi in tal caſo in ciò, che non è materia, vale a dire in Enti ſemplici, ed ineſteſi (84.89.); dunque non potendo dopo tal diviſione reſtare nè materia, nè ciò, che è atto a ricomporla, deve neceſſariamente rimanere annichilata; il che &c.

PROPOSIZIONE VIII.

102. *Suppoſto poſſibile un numero realmente infinito di corpi eſorbitantemente piccoli quanto ſi voglia, dico, che queſto non potrà ſtar racchiuſo in un luogo circoſcritto.*

Non può darſi l' infinitamente piccolo aſſoluto (86.); dunque un corpicello per quanto piccolo ſi voglia ammettere, ſarà ſempre materia (84. 89.), e però ſarà eſteſo (76.); ma è anche impenetrabile (81.); dunque adunato un numero finito di corpicelli, formerà un volume maggiore in parità di circoſtanze di quello, che forma un altro adunamento di minor numero; e così in ſeguito. Or ſiccome il maggior numero al vicendevol contatto genera ſempre a coſe pari maggior volume, ne ſegue, che ſuppoſto poſſibile un numero realmente infinito di tali corpuſcoli, produrrebbe neceſſariamente un volume per ogni verſo infinito; ma un tal volume infinito non può eſſer raccolto in un luogo limitato; dunque è manifeſta la Propoſizione.

PROPOSIZIONE IX.

103. *La Materia non è diviſibile in infinito.*

Se negaſi, ſia diviſibile in infinito. Avrà dunque come tale tutti i luoghi, ne' quali ſarà diviſibile, altrimenti non lo ſarebbe contro l' ipoteſi; ma è per natura eſteſa (76.), impenetrabile (81.), e ſolida (96.) e però conſtante di parti ſolide al contatto l' una dell' altra; dunque ſarà un' unione di parti contigue eſteſe, impenetrabili, e ſolide l' una fuo-

fuori dell' altra; ma la divisibilità si suppone all' infinito, ed infiniti sono in conseguenza i luoghi, ne' quali è divisibile; dunque tali parti solide contigue saranno di numero infinito; ma ciò succederebbe in ogni corpo, ed ogni corpo è circoscritto; dunque 1.) o esisterebbe in materia l' infinitamente piccolo assoluto; 2.) o la materia esisterebbe con infinite divisioni (giacchè la contiguità non le toglie), cioè sarebbe divisa all' infinito senza cessar d' esser materia, vale a dire senza annichilarsi; 3.) o un numero infinito di eguali parti solide per natura sarebbe compreso in un luogo limitato; tutti e tre inconvenienti (86. 101. 102.); dunque è manifesto l' assunto.

DEFINIZIONE XL.

104. COMPOSTO è ciò, che necessariamente consta di parti, vale a dire che è risolubile ne' suoi componenti.

DEFINIZIONE XLI.

105. INCOMPOSTO è ciò, che non avendo chi lo componga, è in conseguenza irreducibile in componenti, cioè non ha parti effettive, che stando in qualunque modo al contatto reciproco, ne formino il tutto.

COROLLARIO I.

106. Dunque ciò, che è incomposto, è di sua natura indivisibile al contrario di ciò, che è composto, il quale è di sua natura divisibile.

Co-

Corollario II.

107. Viceversa ciò, che è divisibile, è composto; altrimenti se fosse incomposto, sarebbe indivisibile.

PROPOSIZIONE X.

168. *La Materia non è sostanzialmente divisibile, nè limitatamente, nè illimitatamente.*

O la Materia presa sostanzialmente è incomposta, o composta. Se il primo: ella è di sua natura indivisibile (106.); se il secondo: risulterebbe di parti poste al contatto, tanto più che è impenetrabile (81.). Or io domando, queste parti sono materia, o non materia? Se mi si risponde, che sono materia, si viene a dire, che la materia sia per se stessa, cioè sostanzialmente, composta di materia, il che non vuol dir nulla (85.). Se mi si replica, che non sono materia, ne verrà in conseguenza, che la materia sarà composta di ciò, che non è materia, cioè di esseri semplici, ed inestesi, o del nulla messo insieme; il primo è insostenibile (84.89.), il secondo è assurdo (60.); dunque la materia non può essere se non incomposta, e perciò tanto limitatamente, che illimitatamente per natura indivisibile; il che &c.

Scolio I.

109. Sul modello della materia hanno i Geometri, come si disse, fabbricato la loro scienza, la quale per altro è

tut-

tutta quanta ſuppoſta, e può con ragione chiamarſi un Ente metafiſico. Queſti per il fine prefiſſoſi avevano biſogno di poter dividere a piacimento qualunque lor quantità, e perciò hanno ſuppoſto, ch' ogni eſtenſione foſſe diviſibile; ma ſiccome la diviſione ſucceſſiva d'un' eſtenſione laſcia ſempre all' intelletto porzioni d' eſtenſione; così non trovando mentalmente alcun termine a tal ſuppoſta diviſione, hanno d' accordo ſtabilito, che qualunque quantità foſſe diviſibile all' infinito. Non contenti poi di reſtare dentro i limiti loro, avendo veduto, che la materia non può eſiſtere, ſe non eſteſa, ed eſſendoli apparſa ſoſtanzialmente diviſibile, hanno per analogia preteſo di provare, che ancor eſſa debba eſſer diviſibile all' infinito. Chi per altro farà ſovra di ciò una conveniente rifleſſione, conoſcerà, che il voler applicare tutte le proprietà concepite dalla noſtra mente in un ſoggetto totalmente immaginario, e da noi creato, ad un ſoggetto realmente eſiſtente, e creato da Dio, e ciò, perchè queſto ha con quello alcuni caratteri di comune, non è che una pura induzione, la quale non convince. Così il dire, che per la ragione che la linea, o la ſuperficie, o il ſolido ſi ammettono diviſibili all' infinito, tale dev' eſſere ancor la materia, perchè è eſteſa, e perchè ci appar diviſibile, a me ſembra una concluſione troppo ardita, la quale in conſeguenza non merita aſſenſo. In fatti la materia ha molte altre proprietà, che non hanno le figure geometriche; onde va riguardata unita a' ſuoi caratteri, almeno principali, per eſattamente concludere a favore, o contro tale apparente diviſibilità.

Ma

110. Ma che diranno i Geometri; se insistendo su i loro principj si farà vedere, che in Geometria non si può rigorosamente ammettere divisione di sorta alcuna, e che perciò, proseguendo la traccia del loro ragionamento, la materia non può essere divisibile? Alla prova. Essi suppongono primieramente il punto realmente indivisibile, indi pretendono, che dal suo flusso, ovvero da innumerabili punti messi l'uno accanto all'altro risulti la linea. Nel primo caso siccome in tutta quanta l'estensione della linea devesi necessariamente incontrare questo punto, è manifesto, che la linea sarà in ogni luogo indivisibile. Nel secondo caso è anche evidente, che non si potrà far divisione della linea, se non tra punto, e punto, il che non può chiamarsi vera divisione; ma la superficie, e il solido provengono dalla moltiplicazione delle linee; dunque nè la linea, nè la superficie, nè il solido saranno in Geometria realmente divisibili.

111. Ma concedasi, che la linea sia divisibile; dico, che non può esserlo all'infinito; imperciocchè ogni composto è risolubile in ciò, che lo compone; ma la linea, come divisibile, è composta (107.), ed il punto per la genesi, che ne danno i Geometri, è il suo componente; dunque la linea dev'essere risolubile nel punto. Ma supponendo la linea divisibile all'infinito, ne viene l'inconveniente, che non sia risolubile in ciò, che la compone (altrimenti la serie decrescente all'infinito, che nasce da tal supposta interminabil divisione, arriverebbe all'ultimo termine, cioè al punto per natura indivisibile, il che è una contraddizione); dunque ripugna, che la linea sia divisibile all'infinito. Quando neghisi, che il punto sia il componente della linea, qualun-

que

que altro si fissi per suo componente, vi si adatterà sempre il medesimo raziocinio. Che se non se le voglia assegnare componente alcuno, ella in tal caso sarà incomposta, e perciò totalmente indivisibile (106.); il che sarebbe contro l'ipotesi. E qui tralascio di nuovamente riflettere, essere una stravaganza il dire, che la materia è divisibile all'infinito per la ragione che il numero, il quale è una cosa totalmente astratta (50.), vien supposto tale per comodo.

112. Finalmente il pretendere di provare la divisibilità all'infinito della materia per mezzo degli effluvj, o degli odori; delle soluzioni, o delle tinture; della piccolezza delle particelle sanguigne d'un Insetto; o de' componenti di un Insetto visibile soltanto all'occhio armato di eccellente microscopio, è una fatica perduta; perche ciò non prova altro, se non l'esorbitante piccolezza delle particelle, che racchiudonsi dentro il volume d'un corpo, ma non gia un'interminabile divisibilità del materiale a tutta sostanza. Anzi dovendosi dal fatto tirar delle conseguenze per decidere su tal intrigata questione, credo (come spero di far vedere nel seguente Capitolo, e altrove) di aver convincenti ragioni da dimostrare, che la divisibilità delle parti componenti un volume corporeo deve aver necessariamente un limite; il che servirà per riprova delle gia addotte dimostrazioni (103. 108.), tentandone in tal guisa per varie strade, come far debbesi (74.), la conferma.

SCOLIO II.

113. Un anonimo Matematico moderno ha preteso d'aver dimostrato, che la materia non è divisibile all'infinito, e ciò con un raziocinio, ch' egli crede d' una forza irresistibile. Ecco le sue stesse parole. „ Dividasi, egli dice, (a) una linea „ in due parti eguali; piglisi una di queste parti, e dividasi „ nuovamente in due parti; dividasi similmente l'una di „ queste due parti, e così successivamente a piacere; non so„ lamente non si giungerà mai all' ultima divisione, ma „ non si potrà nemmeno assegnare il numero delle divisio„ ni, ch'è necessario per giungervi. Si può forse dedurre da „ ciò la conseguenza, che tutte le possibili divisioni di que„ sta linea sono infinite? Erra chi lo crede, per quanto ne „ dicano i Metafisici, i quali hanno questa pretensione; ed „ ecco come io lo dimostro. Se questa linea è divisibile in „ infinito, ella contiene attualmente in se un' infinità di luo„ ghi, ne' quali può esser divisa: ciò è innegabile; poiche el„ la non può esser divisa ne' luoghi, che non contiene. Se „ dunque sono in lei questi luoghi, Dio li vede, onde non „ gli costerà che un atto della sua volontà per farne tutt' ad „ un tratto la divisione. Egli è evidente in tal caso, che „ la penultima metà ne conterrà due, ciascuna delle quali „ sarà indivisibile; dunque &c.. E non mi si dica, che que„ ste due metà saranno tuttavia divisibili all' infinito; poiche „ avendo supposto, che Dio abbia fatto la divisione in tutti „ i luoghi, dove le divisioni infinite di questa linea erano pos„ sibi-

(a) *Lettre d'un Mathematicien à un* [*Abbé &c. pag.* 14. 15. 16.

„ sibili, ne verrebbe, che Dio non avrebbe veduto tutti
„ questi luoghi, se vi restasse a divider qualcosa. Dunque
„ la penultima metà conterrebbe due indivisibili, come ho di-
„ mostrato; e in conseguenza l'antepenultima ne conterrà
„ quattro, la precedente ne conterrà otto, e così dell'altre,
„ raddoppiando sempre fino alla prima; dal che deducesi,
„ che tutta la linea non sarebbe che un composto d'indivi-
„ sibili, il numero de' quali sarebbe veramente inassegnabile,
„ ma per altro finito, giacche il doppio di questa linea ne
„ conterrebbe due volte più, come ho detto superiormente „.

114. Questo argomento, che non è originalmente del Matematico anonimo, ma bensì degli Epicurei (a), è difettoso; imperciocchè concesso, che la materia sia divisibile in infinito, a voler supporre, che Dio la divida in tutti i *dove*, ne' quali è divisibile, bisogna supporre ancora, che il numero delle divisioni debba essere realmente infinito; imperciocchè se fosse limitato, ne seguirebbe subito, che la materia non sarebbe più divisibile all'infinito, contro l'ipotesi. Se dunque il detto numero di divisioni dev'esser realmente infinito, è subito una contraddizione ne' termini il dire, che vi siano le penultime divisioni di ciascuna particella; ovvero supponendo, che vi siano quest'ultime divisioni, si viene ancora a supporre, che l'infinito abbia termini, o che la divisione successiva dell'infinito sia esauribile; cose tutte, che ripugnano.

115. Non si può creder poi, che il detto Matematico supponga, che dopo la divisione fatta da Dio in tutti i *dove*, ne' quali n'è la linea suscettibile, i rimasugli siano linee piccolissime; altrimenti, siccome egli ha accordato, che la li- nea

G 2

(a) V. Petr. de Martino *Philos. Nat. Instit. lib. I. Cap. VI.* §. 112. *pag.* 59.

nea è divisibile in infinito, la divisione non sarebbe perfezionata; bisogna dunque, che egli confessi che la linea resti in tal occasione risoluta in parti inestese, che non son linea, ma che sono atte a formar la linea, cioè l'estensione, e questa in fatti è la sua intenzione, come dal progresso del suo discorso ravvisasi; ed allora ne seguirebbero gli accennati inconvenienti (84. 86. 89.), giacche egli parlando della linea ha la mente ancora alla materia. Ma ne verrebbe anche un altro assurdo, ed ecco in qual maniera. Se si suppone, che un pezzo di linea resti diviso, è manifesto, che la sezione sarà una sola, e due le parti divise: Si proseguisca la divisione: il numero delle parti divise sarà sempre maggiore d'un'unità rispetto al numero delle divisioni; cioè fatto il numero delle divisioni $= a$, sarà questo a quello delle parti recise, come, $a : a+1$. Suppongasi ora infinito il numero delle divisioni, qual si richiede a dividere onninamente la linea stabilita, d'accordo divisibile all'infinito; starà il numero delle divisioni alle parti divise, come $\infty : \infty+1$; vale a dire, che se Dio volesse render la linea divisa all'infinito anche in un solo istante, gli converrebbe (giacche si pretende, che la linea venga da tal divisione risoluta in Enti reali) dividerla in tante parti, che il loro numero sconfinasse d'un'unità l'infinito, cioè che il loro numero oltrepassasse un numero, che non ha fine; il che pure è una contraddizione ne' termini.

116. Risponderanno forse alcuni Geometri, che l'infinito, più l'unità, è eguale al solo infinito, essendo l'unità riguardo ad esso un infinitamente piccolo, o un inassegnabile, e perciò disprezzabile a fronte dell'infinito; ma ricordiamo-

moci, che i Geometri in questo caso parlano in un senso relativo, e non assoluto, (87.), e qui si parla in un senso assoluto, e non relativo; onde una tal risposta non prova niente, come pure il detto Matematico va d'accordo.

Corollario I.

117. Giacche la materia non è divisibile, nè con limite, nè senza limite (103.108.), ne segue necessariamente, che qualunque volume materiale debba constare di parti indivisibili insieme accozzate, solidissime (96.), estese, e di numero inaccessibile alle nostre ricerche, ma però limitato (102.); onde ne può un corpo contenere il doppio, il triplo &c. d'un altro.

Corollario II.

118. Tali particelle essendo incomposte (108.), e perciò onninamente insecabili, debbono essere, ciascheduna da se, nella sua sostanza un perfetto continuo.

Corollario III.

119. Dunque dovrà ciascuno di questi indivisibili esser necessariamente dotato di sostanza uniforme, e semplicissima; poiche se fosse misto, sarebbe composto, e perciò divisibile, contra ciò, che si è dimostrato.

SCO-

S c o l i o III.

119. b. Oltre ad un argomento ſimile all' accennato (113.), gli Epicurei ne facevano due altri egualmente inconcludenti. L' uno poſa ſu queſto fondamento, che tutti i numeri infiniti ſiano eguali tra loro; onde ſe qualunque parte della materia foſſe diviſibile all' infinito, tante parti ſarebbero in una porzione maggiore, quante in una minore, e perciò la maggiore eguaglierebbe la minore. Ma acciò due quantità ſiano eguali, due coſe richieggonſi; cioè che il numero delle parti ſia eguale in amendue; e che tutte le parti d' una porzione ſiano eguali a quelle dell' altra. Se amendue queſte circoſtanze ſi troveranno in due porzioni materiali, le quantità loro ſaranno eguali; altrimenti mancandone una, ſaranno ineguali. Così non per queſto che il braccio, e il palmo dividonſi in dieci parti eguali, ne ſegue, che amendue eſſer debbano eguali, perche ciaſcuna parte del braccio è ſempre maggiore di ciaſcuna parte del palmo. Nell' altro argomento oppongono, che in tal caſo qualunque piccola porzione di materia ſi potrebbe ſuddividere in sfoglie quadrate di tanto numero, che ſarebbe capace di ricoprire tutto il mondo; il che chiamano aſſurdo. Ma ogni volta che concedono queſta diviſibilità, ne viene obbligatamente tal conſeguenza; nè fa oſtacolo il non poterla noi concepire, perche non è aſſurdo quello, che al noſtro intelletto è inacceſſibile.

CA-

CAPITOLO TERZO.

Dell'esistenza degli Atomi, e de' loro Sintomi.

DEFINIZIONE XLII.

120. GLi accennati indivisibili (117.) si chiameranno in avvenire *Atomi*, *corpi semplicissimi*, o *primordiali*, o *elementari*, e ciò ancora per non confonderli con gl'indivisibili geometrici, de' quali si parlerà a suo luogo.

PROPOSIZIONE XI.

121. *La materia considerata, e confrontata a parte a parte non è tutta quanta omogenea.*

Se fosse tale, la varia disposizione, e trasposizione delle sue parti, qualunque fosse, non sarebbe conoscere in essa diversità alcuna in tutto, e per tutto; il che è contro l'osservazione, la quale dimostra in essa una prodigiosa varietà; è dunque manifesto l'assunto.

Sco-

SCOLIO.

122. Pretendono alcuni Filosofi con Des-Cartes, che la materia tutta sia omogenea, ma vogliono, che la varietà delle cose apparenti non da altro provenga, che da una *modificazione* (voce abusiva) de' suoi componenti, e ne mostrano in riprova le varie sostanze, nelle quali un corpo può trasmutarsi. Il grano ex. gr. triturato in farina, e impastato con acqua, e lievito, diventa pane; mangiato trasformasi in chilo, di chilo trasmutasi in sangue, di sangue in carne &c.. Ma queste sono deduzioni tumultuarie, che derivano da un principio falso; il granello del grano acquista le predette metamorfosi, appunto perche nelle sue successive mutazioni s'accompagna con nuovi corpi, dall'unione de' quali, non è gran cosa, che risulti un terzo differente, come è manifesto a chi vi fa un poca di riflessione; ma se il granello suddetto si triturasse per molto tempo in un luogo inaccessibile totalmente a' corpi stranieri, e avventizj, non si troverebbe mai altro, che farina. Di più se fosse vera una tal pretesa modificazione, dovrebbe riscontrarsi in ogni corpo; ma per quanto si tormentino l'acqua, il mercurio, l'oro, l'argento, la terra vergine &c., purche s'adoprino tutte le debite circospezioni, si troveranno sempre nella loro sostanza immutabili intrasformabili, indestruttibili. Ma non è questo il luogo per far vedere estesamente l'inganno d'alcuni Fisici sperimentatori, i quali hanno creduto di osservare tali metamorfosi a tutta sostanza, e basterà avere accennato di passaggio le riprove contro questa modificazione; ognuno può sugli Autori più

più circoſpetti, e particolarmente ſulla Chimica del chiariſſimo Boerhaave convincerſi di queſta verità, per quanto appartiene a fare gli ſperimenti; ſi eſporranno poi a ſuo luogo alcune forti ragioni, che tal modificazione diſtruggono. E qui avvertaſi, che io non voglio adeſſo prevalermi degli argomenti precedentemente addotti a favore dell' eſiſtenza degli atomi, ma procuro, come altrove ho accennato (112.), di tentarne per vie dalle già battute independenti la prova; così una volta che vengano replicatamente ſtabiliti gli Atomi, le modificazioni vanno ſubito in diſperſione.

COROLLARIO.

123. Non eſſendo la materia omogenea conſiderata riguardo al tutto, deve conſtare di parti eterogenee, vale a dire, deve eſſere neceſſariamente miſta dove più, dove meno, relativamente al concorſo più, o meno numeroſo delle dette ſue parti eterogenee.

PROPOSIZIONE XII.

124. *La materia riſulta di particelle ſempliciſſime, ed elementari inſieme coadunate, le quali ſono omogenee relativamente alle ſimili, ed eterogenee riguardo alle diſſimili.*

Giacchè la materia è miſta (123.), o è miſta limitatamente, o illimitatamente. Nel primo caſo ſiccome tutte le ſue parti debbono ſtare al contatto per la ſua impenetrabilità (81.), ed eſſa è diviſibile (79.), ſuppongaſi, eſſer ſucceſſivamente diviſa con un numero continuato di ſezioni. Per quan-

to esorbitantemente grande s'immagini questo numero d'operazioni, si dovrà finalmente arrivare a un termine tale di separazioni, che le parti separate non saranno più miste con altre eterogenee, ma messe insieme da per se tutte le omogenee, formeranno tanti volumi di natura l'uno dall'altro totalmente differente; il che è per se manifesto. Nel secondo caso supposta la materia mista o eterogenea all'infinito, si deve necessariamente ammettere un' interminabile diversità, e dissomiglianza tra particella, e particella qualunque assegnabile della medesima, dimodoche il corpo A non solo sarà in sostanza, e in apparenza dissimile dal corpo B, ma diviso ancora l'uno o l'altro in quante si vogliano parti di varia grandezza, e configurazione, niuna delle parti del corpo A potrà rassomigliarsi con qualunque altra dal medesimo distaccata; niuna del corpo B con qualunque altra dal medesimo divisa, e niun rottame del primo con niun rottame del secondo. Non si troverà dunque corpo alcuno, che compresentato ad un altro lo rassomigli; traspeste, e rimescolate le parti d'un corpo, dovrà questo variare continuamente, almeno d'aspetto, e non esser più ad ogni momento riconoscibile. Un pezzo d'oro ex. gr. non avrà nell'universa materia somiglianza con verun altro corpo, e ci sarà visibile sotto una varietà interminabile d'apparenze; e ciò tantopiù, quantopiù sarà o voluminoso, o diviso, o battuto, o liquefatto; in somma quantopiù sarà fatto mutar luogo, ed ordine in qualunque maniera alle sue parti; il che essendo contrario totalmente ad una continua esperienza, ne segue, che non si può in conto alcuno ammettere la materia mista, ed eterogenea all'infinito; onde bisogna, che consti di corpi semplicissimi, i quali ripar-

ripartiti formar possano tante classi diverse, ed eterogenee fra loro, ma ciascuna risultante di componenti omogenei; il che &c.

S c o l i o.

125. Potrebbe opporsi, che vi possono esser benissimo corpi semplicissimi, o primigenj, che considerati in se stessi siano misti all' infinito, ma considerati relativamente a' corpi risultanti da un loro ammassamento omogeneo, o sia della medesima specie di mistura, si possano ammettere come semplici. Al che rispondesi, facendo la seguente divisione. O tali elementi si suppongono solubili in tutta la serie continuatamente diversa all' infinito; o si suppongono indissolubili. Se solubili, siamo da capo; imperciocche mutato l' ordine delle parti, deve per la dottrina delle combinazioni mutarsi anche il tutto, ed apparire in conseguenza sotto diversa sembianza, e sotto nuova caratteristica; così l' acqua sarebbe acqua, e non acqua, l' oro sarebbe oro, e non oro &c. il che ricade ne' sovraccennati inconvenienti. Se insolubili; cioè se i detti loro differentissimi componenti rimangono immobili, ed inseparabili da qualunque forza, la questione sarà chimerica, e in conseguenza inutile; imperciocche o misti, o semplici che si suppongano, saranno sempre la figura di semplici, come quelli, che con la varia loro mescolanza debbono variamente organizzare i misti, e che debbono per l' ipotesi rimanere insecabili, ed indestruttibili. E' però vero, che potendo gli Oppositori solamente supporli, ma non dimostrarli misti all' infinito, vi sarebbe

rebbe tanta ragione dalla lor parte di così crederli, quanta dalla mia di crederli semplicissimi, con questa differenza, che io avrei il vantaggio di non moltiplicare, come essi farebbero, gli Enti senza necessità, il che è un inconveniente (61.); va dunque a terra l' opposizione.

PROPOSIZIONE XIII.

126. *La Materia non è divisibile all' infinito.*

E' fuor di dubbio, che mutata la configurazione delle particelle costituenti un composto, deve necessariamente mutarsi la sua organizzazione, e conseguentemente la sua apparenza. Se dunque le particelle semplici primigenie de' corpi, dalle quali resultano i misti (124.), fossero divisibili, la struttura di tutte le produzioni naturali bene spesso si cangerebbe, e con essa cangerebbesi ancora frequentemente in nuovi aspetti non più osservati la gran scena del Mondo; ma tutte le dette produzioni mostrano ne' loro cangiamenti vicende d' un periodo inalterabile; dunque le dette particelle semplici primordiali, che costruiscono la gran macchina dell'Universo, sono nella loro figura immutabili, e però infrangibili da qualunque forza esistente in natura; nel che concordano tutti i migliori Fisici moderni sotto il vessillo del gran Newton [a]. Posto ciò, se Dio avesse creato queste particelle elementari divisibili all' infinito, avrebbe loro dato una proprietà inutile, come quelle, che sarebbero state create divisibili per non esser giammai divise; il che ripugna (61.); dunque le particelle semplicissime conformatrici de' corpi debbono essere in-

(a) *Optic. Quest.* 31. *pag.* 325. *Edit.* | *Lausanne* 1740.

indivisibili per natura, e perciò la materia non è divisibile in infinito; il che &c.

SCOLIO I.

127. Mi sarà forse opposto, che io doveva prima dimostrare, che Dio poteva formar l' atomo perfettamente duro, o sia d' una perfetta continuità, e allora ne veniva subito la conseguenza legittima, che avendolo egli potuto fare, e non avendolo fatto, avrebbe dato nell' inconveniente di far per il più ciò, che far poteva per il meno. Al che rispondo, che non solo credo, che Dio abbia potuto farlo, ma credo repugnante, ch' egli abbia creato la materia divisibile in infinito; ed eccone la ragione. Se Dio l' ha creata tale, è certo, che ella contiene tutti i luoghi, ne' quali è capace d' esser divisa, e se li contiene, Dio gli vede; or se gli vede, io domando: tra luogo, e luogo cosa vede? Se mi si risponde, materia, la materia non sarebbe più divisibile all' infinito, contra l' ipotesi. Se mi si risponde, Enti semplicissimi privi d' estensione, questi si è veduto, che non sono possibili (84. 89.); non vi resta dunque altro, che il nulla assoluto; onde Dio vedrebbe nell' atto istesso la materia, e come una cosa realmente esistente, e come il nulla assoluto, la di cui esistenza ripugna (60.); il che è un orribile assurdo, non essendo Dio suscettibile del principio di contraddizione; dunque ripugna, che Dio abbia creato la materia divisibile all' infinito, e perciò, annullata l' objezione non solo rimane la dimostrazione della presente Proposizione in tutto il suo vigore, ma quando non fosse d'universal

versal soddisfazione, la prova addotta in questo Scolio può supplire alle sue veci. Sicche essendosi oramai sufficientemente dimostrate per più versi queste verità, (103. 108. 115. 116. 117. 118.), lasciamo, che ognuno scelga quella dimostrazione *a priori*, o *a posteriori*, che più li piace, e passiamo intanto agli importanti Corollarj, che ne provengono.

COROLLARIO I.

128. Gli Elementi dunque di tutto il materiale sono (ripetiamolo a motivo dell'ultime replicate dimostrazioni con diverso metodo (115. 117.)) sostanze incomposte, e però semplicissime dotate d'un continuo perfetto, e in conseguenza infrangibili, inflessibili, ingenerabili, e indestruttibili, così create di pianta dalla divina Onnipotenza, acciò servano di base a tutte le produzioni dell'Universo.

SCOLIO II.

129. Ma qui sentomi universalmente rinfacciare essere assurdo, che possa darsi estensione senza parti effettive; al che rispondo, che la verità non può essere se non una sola (7.), e che la natura non discorda mai da un esatto raziocinio giusta quel detto

Nunquam aliud Natura, aliud Sapientia dicit;

onde tralasciata ogn' inutile altercazione, ogni volta che sia stato esattamente dimostrato, che la materia non sia divi-
sibile

sibile in infinito, e che non sia risolubile in ciò, che non è materia, ovvero ogni volta che sia stato dimostrato, che la materia sia essenzialmente incomposta, bisogna necessariamente venire all' atomo senza parti effettive, e con tutto ciò esteso; altrimenti più atomi non potrebbero formare l'estensione, che ravvisasi nel volume de' corpi. Che se facesse ostacolo il non potersi concepire l'atomo esteso senza parti, replicherei, che ciò non prova niente contro la sua esistenza ogni volta che questa sia stata con più metodi esattamente dimostrata (70.); e che se molti Filosofi hanno col Leibnizio ammesse le monadi, perche le credevano stabilite da un raziocinio ben dedotto, quantunque incomprensibili, come notò l' Eulero (85.), si possono ammettere per la medesima ragione gli atomi dell' espresso carattere, benche siano al nostro intelletto assai limitato inconcepibili.

S c o l i o III.

130. Democrito, ed Epicuro erano anch' essi d'opinione, che vi fossero gli atomi, ma ne avevano un'idea differente dalla nostra in quanto alle loro proprietà, che si anderanno esponendo; nè mai, per quanto sappiasi, ne dimostrarono concludentemente l'esistenza. Lucrezio Caro ci portò d'Atene la dimostrazione, che correva, cred'io, a'suoi tempi; eccone le parole (a):

Tum porro quoniam est extremum quodcumque cacumen
Corporis illius, quod nostri cernere sensus

Jam

(a) *Lib. I.*

Jam nequeunt: id nimirum sine partibus extat,
Et minima constat natura: nec fuit unquam
Per se secretum, neque posthac esse valebit:
Alterius quoniam est ipsum; primæ quoque & imæ,
Inde aliæ atque aliæ similes ex ordine partes
Agmine condenso naturam corporis explent.

quale specie di dimostrazione a mio credere non prova niente.

COROLLARIO II.

131. Rigettate le monadi (84.), e i punti immateriali (89.), e stabilita l'esistenza degli atomi (117. 128.), ne segue necessariamente, non potervi essere fuor di questi altro corpo preesistente, o primigenio; altrimenti, vi sarebbe l'atomo dell'atomo in infinito, e si tornerebbe all'interminabile divisibilità della materia gia ripudiata (103. 108. 126. 127.).

COROLLARIO III.

132. L'impenetrabilità dunque (81.), e la solidità perfetta della materia (96.) non sarà, se non nell'atomo; onde siccome per materia, cioè per tutto il sensibile (1.), non si può concepir altro, che acervi d'atomi posti al contatto, così vedesi, non poter esser la materia sostanzialmente divisibile, nè all'infinito, nè limitatamente, ma sempre immutabile per natura, dimodoche quando dividiamo un corpo, non facciamo divisione reale di sostanza corporea, ma soltanto relativa, togliendo unicamente dal contatto

tatto

tatto gli atomi assieme ammucchiati; e però falsi sono i Teoremi di Keil (a) supponenti l' interminabil divisibilità della materia.

Corollario IV.

133. Concesso, che lo Spazio sia (come spero di potere stabilire fra poco) reale, infinito, indivisibile, immutabile, e però senza superficie; siccome fuori dell' intelligenze spirituali non v' è altro tra le cose realmente esistenti, che spazio, e materia, (esclusone il Tempo, che farò vedere, esser soltanto una cosa relativa), così non v' è altra superficie nell'Universo, che quella dell' atomo, di cui egli come esteso, e circoscritto deve necessariamente constare. Ma l' atomo è per se stesso insecabile (132.); dunque insecabile ancora, e indivisibile è di suo carattere la superficie; onde allorche noi dividiamo una superficie d' un dato volume corporeo in più parti, facciamo un' apparente, e non una reale divisione, cioè facciamo una divisione relativa a' nostri usi; nella quale occasione restando allontanati soltanto gli atomi dal lor consorzio portano seco intatta la loro innata immutabile superficie.

Corollario V.

134. Siccome gli atomi si possono variamente associare, così da i varj loro cumuli risulterà la varia configurazione de' corpi sensibili, e perciò la materia sarà diver-

(a) *Introd. ad veram Phys. lect. V. pag.* 157. *seqq. Edit. Lugd. Bat.* 1739.

ſamente figurabile, ma lo ſarà apparentemente, cioè riguardo a' detti ammaſſamenti, e non in ſoſtanza, giacche la ſuperficie degli atomi è totalmente inalterabile (133.). Quindi *configurazione aſſoluta* è quella, che è indiſpenſabile, ed ingenita agli atomi; *configurazione relativa* è quella, che prendono le varie oppoſizioni di atomi con atomi nell' aſſociarſi a formare qualche corpo, come ancora ad accreſcerlo, o a diminuirlo di volume.

Corollario VI.

135. La materia dev' eſſere neceſſariamente poroſa, non potendo gli atomi, di qualunque configurazione ſi ammettano, fare a meno di non laſciar de' vuoti nelle varie loro coadunazioni, particolarmente dovendovi ſpeſſo concorrere il moto ad alterarne la ſituazione, e la vicendevole appoſizione. Tal poroſità però non può andare all' infinito, come molti han creduto, dovendo arreſtarſi al perfetto continuo degli atomi (128.); il che è per ſe ſteſſo evidente; e perciò deve darſi neceſſariamente ne' corpi ciò, che chiamaſi *Vuoto diſſeminato*.

Corollario VII.

136. Eſſendo la materia tutta più, o meno poroſa (135.), tutta ancora ſufficientemente aſſottigliata, dovrà eſſer diafana.

Co-

COROLLARIO VIII.

137. Quando gli atomi posti in un volume giungono a toccarsi in tutti i punti possibili, allora il detto volume non può più per mezzo della compressione diminuirsi; la materia dunque ha un limite di condensazione, il quale non è trasgredibile, e però non può dirsi, come alcuni hanno creduto, che la materia tutta quanta possa ridursi in un pozzo di ordinaria grandezza, vale a dire in un piccol volume riguardo alla sua vastissima estensione.

COROLLARIO IX.

138. Son dunque falsi gli Elementi di Des-Cartes, come quelli, che son supposti dal loro Autore divisibili in infinito.

SCOLIO.

139. Avvertasi, che quando io dirò in avvenire *Materia divisibile, e figurabile*, intendo di usare il linguaggio comune relativo a' nostri usi, e non di significare, esser l' atomo di tal carattere; il che sia detto adesso per sempre, acciò non sembri, che io mi contraddica.

PROPOSIZIONE XIV.

140. *Gli Atomi dovevano essere necessariamente eterogenei per la consurrezione de' varj misti, che osservansi in natura.*

Se fossero stati tutti omogenei, non v'era ragion sufficiente, per cui più gli uni che gli altri dovessero mutar natura, divenendo eterogenei; e per cui delle nuove innumerabili proprietà possibili potessero assumerne più tosto una, che un'altra; onde tutta la materia sarebbe rimasta sempre omogenea, cioè d'aspetto uniforme in tutte le sue produzioni; ma queste sono d'aspetto assai diverso; dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO.

141. Ruina dunque la strepitosa *Materia prima* d'Empedocle, d'Aristotile, de' Peripatetici, e degli Scolastici insieme con la tenebrosa sua definizione; non bastando a correggerla le mostruose forme sostanziali licenziate oggimai dal buon senso [a]. Gli atomi di Democrito, d'Epicuro, e di Gassendo, posti d'una natura universalmente uniforme tra loro, sono pure per tal generale omogeneità insostenibili, come insostenibili sono le modificazioni Cartesiane anche altrove rigettate (122.).

PRO-

(a) *V. Hist.du Ciel &c. T.* 2. *pag.* 1 122. *seq.*

PROPOSIZIONE XV.

142. *Quantunque la materia altro non sia, che un mescuglio di atomi eterogenei, non debbono però questi esser tutti di tal sorta, che non ve ne sia neppur uno, che si rassomigli ad un altro.*

Imperciocchè, se neppur uno ve ne fosse omogeneo ad un altro, la materia tutta non avrebbe in tutta quanta la sua estensione porzione alcuna ad un' altra rassomigliabile; onde ne succederebbero gli incovenienti altrove accennati (124.), che ad una continua esperienza si oppongono; è dunque manifesto l'assunto.

COROLLARIO I.

143. Deve esservi dunque necessariamente una moltitudine di atomi di ciascuna specie, cosicchè venendo in occasione del moto queste specie differenti tra loro mescolate, e rimescolate, se ne formino misti all'aspetto diversi a proporzione della varia eterogeneità degli atomi concorsi, e della quantità, con cui gli atomi di varia specie concorrono, e delle varie loro combinazioni nella comune mescolanza; cioè 1.) a proporzione del numero delle specie differenti concorse; 2.) del numero di quegli atomi, ognuno de' quali riconosce la sua specie particolare; 3.) della varia loro distribuzione.

Sco-

SCOLIO I.

144. Per meglio spiegarmi, figuriamoci varj mucchj di semi diversi, ognuno de' quali mucchj sia composto di semi omogenei; un mucchio ex. gr. di granelli di grano, un altro di panico, un altro di miglio, un altro di vecce &c.. Se ne mescolino varie porzioni di ciascuna classe, o specie; è chiaro, che il misto risultatone diversificherà più, o meno, a proporzione delle specie, che io farò concorrere in esso; cioè il misto di tre tali specie sarà diverso da quello di due, e questo da quello di quattro, &c.. Di più tal misto diversificherà nuovamente a proporzione del numero de' granelli di ciascuna classe; così il misto di parti eguali di ciascuna classe sarà diverso da quello, dove concorreranno parti diseguali di semi; in oltre se quelli di miglio si aduneranno più in un luogo, che in un altro, cioè se i semi saranno egualmente, o inegualmente distribuiti nella mescolanza &c..

COROLLARIO II.

145. Tutti gli atomi omogenei debbono essere eguali fra loro, non essendovi ragione, per cui nelle produzioni semplicissime omogenee l' una debba prevalere all'altra, tanto in volume, che in configurazione (53.).

Co-

COROLLARIO III.

146. Gli atomi eterogenei adunque potranno essere di figura, e di grandezza differente; il che ci vien maggiormente persuaso dall' osservare le differenti porosità nelle diverse produzioni.

COROLLARIO IV.

147. Vi debbono esser tra' corpi volumi d'atomi interamente omogenei, essendo impossibile che nel rimescolamento di tante diverse classi qualche quantità di soli atomi omogenei non s' accozzi, e non si raccolga separatamente; qual unione, quando anche vi si trovi dispersa qualche particella peregrina, o eterogenea sfuggente i nostri sensi, può far figura di semplice.

COROLLARIO V.

148. Un atomo, o un dato volume di atomi, siano semplici, o misti, è impossibile, che sia trasmutabile in atomi di natura, o di figura diversa; onde nelle varie manipolazioni de' corpi non potranno essi far altro, che mutar luogo, e contatto reciproco.

Sco-

SCOLIO II.

149. Qualora l'induſtria umana uſando le debite cautele trovi alcune ſpecie di corpi di ſtruttura totalmente immutabile, ovvero irreducibile in altri volumi tra di loro eterogenei, biſognerà convenire, eſſer tali corpi formati da un ammaſſamento d'atomi omogenei, nulla turbando tal verità, come ſi è detto (147.), l'interpoſizione, e il concorſo di qualche particella ſtraniera. In queſto poſſeſſo per confeſſione d'Uomini grandi i più ſchietti, e i più veridici, tra' quali è l'inſtancabile Boerhaave [a], ſono i metalli ſpogliati al poſſibile delle parti eterogenee, l'acqua, il mercurio, la terra vergine &c.. In fatti per quanto in mille maniere miſti ad altri corpi rimangano maſcherati, ritornano ſempre al loro eſſer primiero. Non potrà mai dunque un elemento aqueo ex. gr. cangiar natura, e trapaſsare in un elemento mercuriale, e viceverſa; o vogliamo dire un volume aqueo in un volume mercuriale, e viceverſa; così di tutte le altre traſmutazioni degli altri corpi ſempliciſſimi, come ſarebbe del mercurio in oro, o dell'oro in altri metalli, o corpi ſemplici, e miſti. L'arte chimica pertanto, con tutte le magnifiche promeſſe de'ſuoi Adepti, non è mai giunta, nè mai potrà giungere ad altro, che a cangiare la ſituazione delle parti ne'corpi, ſiano ſemplici, o miſti; il che non è mai traſmutare a tutta ſoſtanza un corpo in un altro. E' dunque aſſurda tra gli Uomini la ſperanza, o ſia follia, di una tal traſmutazione, come appunto aſſurda ſarebbe la prentenſione d'anni-
chi-

(a) *Chimiæ Elem. T. 1. & De Merc.*

chilare un corpo, e crearne in sua vece un altro di pianta; il che sarebbe il sommo dell' umana temerità. Spero però io altro tempo diffondermi più convincentemente, e voglia Dio più fruttuosamente, per tentare, se è possibile, di sradicare da' cuori umani questa frenesia, che riduce spesso i troppo creduli all' ultimo esterminio delle loro sostanze, e talvolta di loro stessi.

COROLLARIO VI.

150. Per esser gli atomi fra loro differenti in grandezza, e configurazione (146.) e per non darsi fuor di essi altra sostanza corporea (131.), vi dovrà essere in natura il grande, e il piccolo, cioè il massimo, e il minimo; e qui intendo di parlare di grandezza reale, qual è quella dell' atomo, e non di grandezza relativa, qual è quella del volume (21.); similmente quando dico il massimo, e il minimo, non pretendo, che vi sia un solo atomo, che sia il minimo di tutti, e viceversa; ma intendo di parlare di tutti quegli atomi, che sono ciascuno la minima quantità, e viceversa.

PROPOSIZIONE XVI.

151. *Il numero de' corpi primordiali toccato in sorte sì al nostro, che agli altri Globi, è limitato.*

Se fosse infinito, il nostro Globo, che nella sua estensione è limitato, verrebbe a comprendere in un luogo circoscritto una serie realmente infinita di particelle corporee estese, e solide (96.), poste in conseguenza l'una al con-

tatto dell'altra, nè l'una dall'altra molto diverse in grandezza; il che è assurdo (102.); il medesimo dicasi di qualunque altro Globo celeste; è dunque manifesta la Proposizione.

Corollario I.

152. Quando si potesse sapere il numero delle varie classi di tali atomi, o elementi, è manifesto per la dottrina delle combinazioni, che si saprebbe in quante maniere si potessero variamente combinare per il risultato di tutti i misti possibili in ogni Globo.

Corollario II.

153. Siccome innumerabili sono le diversità de' misti, che osservansi nella nostra terra, ne viene per conseguenza necessaria, che molte siano le specie de' suoi elementi; onde è falso, che siano solamente quattro, come pretendeva Aristotile; poiche al solo numero di ventiquattro si estenderebbero le possibili trasposizioni; gli ambi sarebbero sei, i terni quattro, un solo quaderno, e quattro i volumi de' corpi semplici; il che vien dimostrato falso dall'esperienza. Con simil computo si troveranno parimente erronei i principj Chimici, che sono cinque, i Cartesiani, che sono tre, i Beckeriani, che sono due, &c.

Co-

COROLLARIO III.

154. Quando si accumuleranno in un volume molti atomi tutti omogenei, la loro varia combinazione, è manifesto, che non verrà ad alterare giammai tal unione, onde rimarrà sempre il tutto nel medesimo grado di semplicità.

SCOLIO.

155. Non v'è ripugnanza alcuna a credere, che vi possano esser de' Globi dotati di corpi primordiali differenti d'aspetto da' nostri; onde possono contenere corpi misti a noi cogniti, ed altri a noi totalmente incogniti, come irreperibili nel nostro Globo. E se, come alcuni de' migliori Filosofi lo credono, fosse possibile, che una Cometa cadesse dentro un Pianeta, o l'urtasse, sarebbe ancora possibile, che un tal accidente portasse in esso, oltre i terribili cangiamenti in genere di percossa, una nuova per altro non desiderabile supellettile di corpi tanto semplici, che misti, la varia unione de' quali combinasse corpi terzi all'uno, e all'altro Mondo prima totalmente sconosciuti. Lascio ad altri il tirare da questi principj ulteriori conseguenze, e passo al

 CAPI-

CAPITOLO QUARTO.

Del Pieno, e del Vuoto.

PROPOSIZIONE XVII.

156. **I***L Pieno perfetto materiale è incompatibile col moto.*

Quantunque da ciò, che s' è detto (135.), comprendasi, dover esser la materia porosa, non solo unita al moto, quanto ancora considerata senza di esso, potendosi supporre, che atomi ovali, o sferici formino qualche volume; nondimeno fuori anche de' posti principj è dimostrabile contro i Cartesiani, esser il pieno perfetto materiale incompatibile col moto; imperciocchè o si suppone tal pieno terminato, o infinito. Se terminato: siccome il moto può farsi per ogni direzione, ne proverrà necessariamente una di queste due cose, cioè o che 1.) resterà la materia smembrata, e divisa in pezzi, quando il moto succeda per direzioni contrarie, ed allora vi resterà vuoto di mezzo; o che 2.) il detto moto sarà insufficiente a spiegare i fenomeni, quando sia circolare.

Per meglio spiegarmi denoti nel primo caso la superficie sferica ABC (*Fig.* 3.) tutto il recinto dell' ammessa materia

teria limitata, il quale sia pieno perfettamente; converrà confessare, essere ogni corpo ad un perfettissimo vicendevol contatto con i corpi collaterali. Eseguiscasi ora il moto; siccome la materia è solida (96.), quel corpo, qualunque sia, che deve muoversi, non potendo penetrare la materia contigua, e viceversa, dovrà sospingere avanti quell' altro corpo, che si oppone immediatamente alla sua progressione; questo farà il simile del contiguo, e così successivamente. Suppongasi pertanto muoversi il corpo *d* per la retta *d*C, dovrà muovere tutti i corpi intermedj per tal direzione, sicche essendo esorbitante il tratto *d*C, bisognerà assegnare una forza spaventosa al corpo *d*, per quanto piccolo immaginar si voglia. Ma concedasi questo. L'ultimo corpo situato in C, dove ha da andare? Se oltrepassa il punto C, questo non è più il termine assegnato; ma l' oltrepassi; tra 'l corpo *s*, ch' era contiguo al corpo *d*, ed esso corpo *d* dovrà nascere necessariamente una distanza, giacche tutta la serie de' corpi da *d* fino in C è obbligata per l' ipotesi a discostarsene. Ma la serie da B fino in *s*, sarà risposto, subentrerà a riempiere il vuoto lasciato. Se così è, replico io, qual ragione milita a favore di tal successivo rimpiazzamento? La Natura, che abborrisce il vuoto? Questa passa oggimai per una follia. Ma concedasi tal subentrazione. Se la serie de' corpi da B in *s* muta luogo, muovendosi verso C, qual corpo verrà a riempiere il vuoto lasciato tra il punto B, e l'ultimo corpicello della mossa serie? I superiori, gl' inferiori, o i laterali? Non v' è ragione più a favor di questi, che di quelli; e poi non essendovi causa alcuna, che agisca su tali corpi, dovranno mantenersi nello stato di quiete, in cui tro-

va-

vavansi (53.98.); ma voglio concedere ancor questo; bisognerà confessare, che questi lasceranno obbligatamente degli spazj, che non potranno mai riempiersi; imperciocchè se si concede, che una porzione della serie *d*C esca fuori del punto C, un vuoto dentro della sfera perfettamente piena ABC deve darsi necessariamente; altrimenti la stessa porzione di materia sarebbe rarescibile senza alterare la sua durezza, il che è falso; perchè se fosse sostanzialmente rarescibile, sarebbe anche sostanzialmente condensabile, e perciò compenetrabile contra quanto si è stabilito (81.). Ma quando rispondessero, che gli spazj si formerebbero finalmente all'estremità, il che non guasterebbe l'idea del pieno perfetto, replicherei, che quello, che si suppone farsi dalla serie de' corpi da *d* in C, cioè di muoversi per una direzione, si supponga farsi da un'altra serie di corpi per una direzione opposta, e così in seguito di tutte l'altre circonvicine, giacchè a tal supposizione non v'è ripugnanza alcuna; è chiaro, che ne dovrà seguire uno sparpagliamento, e uno sbranamento totale, il quale non solo non ammetterà nessun rimpiazzamento circa alli spazj lasciati, ma ne formerà successivamente de' nuovi. Riguardo dunque al moto rettilineo è impossibile il pieno perfetto di materia limitata.

In quanto poi al moto curvilineo, quando si volesse supporre concentrico, o eccentrico, bisognerebbe per salvare il pieno, che la catena de' corpi mobili si muovesse tutta ad un tratto uniformemente, il che con poca riflessione, che vi si faccia, oltre agli altri inconvenienti, non è sufficiente a spiegare i fenomeni; imperciocchè o si muoverebbe la materia tutta quanta in un tempo, il che sa-

reb-

rebbe come se non si muovesse; o si muoverebbero varj strati per direzioni opposte senza intralciarsi, e allora non vi sarebbe, se non moto curvilineo, il che è contrario all' esperienza. Aggiungasi, che non essendo i mobili esenti dallo strofinamento, presto il moto cesserebbe in ogni parte, il che pure essendo contrario al fatto dimostra, che nemmeno è possibile il pieno perfetto limitato.

Passiamo ora al secondo caso, cioè alla materia supposta infinita. Dico, che il moto rettilineo in essa è impossibile; ed insussistente il moto circolare fatto in una sua porzione, giacche in tutta l' estensione è impossibile. Imperciocche se dovrà muoversi un corpo per una direzione qualunque, giacche il tutto è ad un perfetto contatto, egli dovrà muovere ad un tratto tutti i corpi posti per tal direzione; ma questi suppongonsi infiniti di numero, e tutti sono resistenti per l' esperienza; dunque un solo corpicello quanto si voglia piccolo vincerebbe nel muoversi la resistenza d' infiniti corpi; ma questa è infinita; dunque il detto corpicello possederebbe una forza più che infinita, il che repugna. Ma concedasi, che la materia non sia suscettibile di resistenza, e suppongasi, se pur è possibile, una serie di corpi CD (*Fig.* 4.) posta per diritto, e da ambe le parti totalmente interminabile. Muovasi ora il corpo A verso il punto C con la direzione AC, è certo, che dovrà muovere tutta la serie de' corpicelli posti per la direzione AC in infinito; ma tal serie è infinita; dunque per dar luogo al corpicello A, essendo impenetrabile, deve oltrepassar l' infinito, il che è un' implicanza ne' termini. Pure si sconfini l' interminabile; domando

ora

ora la ragione per cui il corpo B, che era contiguo al corpo A, debba, per riempirne il vuoto lasciato, muoversi con tutta la serie infinita degli altri corpi, che li sono alle spalle? Forse per un impulso in fondo all' infinito? Ma passiamo sopra anche a questo inconveniente, e concediamo, che vi sia qualche ragione. Questo movimento del corpo B con tutta la catena degl' infiniti corpi dalla parte di BD o si farà tutto ad un tratto, o successivamente. Se il primo; ne seguirebbe, che l'istessa quantità di materia occuperebbe più, e meno luogo nel tempo medesimo senza lasciar vuoto alcuno; e ciò all' infinito, se incessantemente si supponesse muoversi il corpo A per la detta direzione AC, il che è un manifesto assurdo. Se il secondo; dovendo toccar prima al corpo B, poi al secondo, indi al terzo &c. a muoversi, è chiaro che un posto lasciato vuoto vi sarà, o vi resterà sempre, quando non si supponesse terminabile l'interminabile; il che è un altro assurdo. Non è dunque nemmeno nella materia supposta infinita sostenibile il pieno perfetto riguardo al moto rettilineo. Per il curvilineo poi, la sua insufficienza notata nella materia finita è per le medesime ragioni adattabile anche alle assegnate porzioni dell' infinita; con che resta dimostrato l'assunto.

COROLLARIO.

157. Non potendosi dare il pieno perfetto materiale, ne viene in conseguenza necessaria, che esista il vuoto, o lo spazio, o il luogo (chiamisi comunque si vuole); e ciò non solo riguardo alla porosità, che lasciano gli atomi nel formare col loro adunamento un volume (135.), ma per quel

che

che concerne ancora la distanza possibile tra corpo, e corpo senza materia intermedia, e sia pur tal distanza piccola, o grande enormemente.

PROPOSIZIONE XVIII.

158. *Il gran Vuoto, dove esiste, e muovesi la materia, chiamato comunemente Spazio, è un Ente reale.*

O la materia poteva esistere, e muoversi nel puro nulla, o vi era necessario un luogo per la sua esistenza tanto in moto, che in quiete. Se il primo: il nulla assoluto esisterebbe; il che è assurdo (60.); ovvero Dio nel crear la materia avrebbe potuto, come dice il famoso Co. Magalotti [a], fare una Creatura, e quella non essere in nessun luogo, giacche il nulla implica, che ammetta in se luogo alcuno; il che è un altro assurdo. Dunque doveva succedere il secondo, esservi cioè un luogo per la sua collocazione; ma la materia esiste; dunque deve essere esistente anche il luogo, o lo spazio, ed esser perciò un Ente reale, e positivo (14.); il che &c.

S c o l i o.

159. Il Leibnizio ha preteso di sostenere, che lo spazio sia un mero nulla, ponendolo solamente nella distribuzione, e nell' ordine de' corpi coesistenti. Il Cav. Newton, e dopo di esso il Dott. Clarke pretendono, che ne venga un assurdo. „ Il Leibnizio, dice Mr. Voltaire, [b], sostie-

L „ ne,

(a) *Lettere Familiari Parte I. Lettera XVI.*

(b) *Oeuvres, T. 6. Chap. II. pag. 27. à Dresde 1748.*

„ ne, che lo spazio non è niente altro, se non la relazione, che noi concepiamo tra gli esseri coesistenti, niente altro, se non l'ordine de' corpi, la loro disposizione, le loro distanze &c. Clarke dopo Newton sostiene, che, se lo spazio non è reale, ne segue un' assurdità; imperciocchè se Dio avesse posto la Terra, la Luna, e il Sole, dove sono le Stelle fisse col medesimo ordine, in cui sono al presente, ne verrebbe, che la Terra, la Luna, e il Sole sarebbero nel medesimo luogo, che occupano presentemente; il che è una contraddizione ne' termini „.

160. Per altro l'istesso Leibnizio era una volta di parer contrario, e non nega, che, dati gli atomi solidissimi, lo spazio non deva esistere necessariamente. Odasi. „ Je demeure (a) d'accord de la difference qu'il met (M. Locke) avec beaucoup de raison entre la *Matiere* & l'*Espace*. Mais pour ce qui est du *Vuide* plusieurs personnes habiles l'ont crû. M. Locke est de ce nombre; j'en étois presque persuadé moi-même, mais j'en suis revenu depuis long-tems. Et l'incomparable Mr. Huygens, qui étoit aussi pour le vuide & pour les atômes, commença à faire reflexion sur mes raisons, comme ses lettres le peuvent temoigner. La preuve du Vuide prise du mouvement, dont M. Locke se sert, suppose que le corps est originairement dur, & qu'il est composé d'un certain nombre de parties inflexibles. Car en ce cas il feroit vrai quelque nombre fini d'atômes, qu'on pourroit prendre, que le mouvement ne sauroit avoir lieu sans vuide; mais toutes les parties de la matiere sont divisibles & pliables „. Mi lusingo per altro d'aver dimostrato

(a) Leibnitii *Epist. ad diversos per* I Christ. Kortholt. *Vol.* 4. *pag.* 407.

to il contrario di ciò, che quest'Autore rinvolto per lo più ne' Sistemi arbitrarj pretende sulla pieghevolezza, e divisibilità della materia a tutta sostanza, avendo io dimostrato, non esservi niente di pieghevole, nè di divisibile originalmente in natura (108.128.131.), e perciò quello, che egli assume per vero, essere una semplice apparenza.

161. Alcuni altri poi in simil guisa argomentano. Lo spazio non è altro, che mancanza di materia; ma la mancanza della materia è un puro nulla; dunque lo spazio è un puro nulla. Questi suppongono ciò, che è in questione; poichè non dimostrano per qual ragione asseriscano, che lo spazio non sia altro, che mancanza di materia; e non dimostrano neppure, che la mancanza di materia sia un puro nulla. In fatti allora sarebbe ciò vero, quando avessero dimostrato, che fuori della materia, e delle spirituali Intelligenze non esistesse, o non potesse esistere altro Ente positivo, il che non hanno fatto, e si può dire, che non faranno giammai. Non essendo dunque dimostrato, che la privazione di materia escluda ogni esistenza di qualunque Ente positivo fuori delle dette Intelligenze, l'addotto argomento va a terra.

COROLLARIO I.

162. La materia per esistere dovendo supporre la preesistenza dello spazio, non può essere a meno, che non sia contingente (61); cioè creata.

COROLLARIO II.

163. Se la materia per esistere ha bisogno dello spazio previo (162.), non può distruggerlo in atto della sua esistenza, o della sua collocazione, ma soltanto occuparlo.

COROLLARIO III.

164. In conseguenza lo spazio è di sua natura penetrabile.

COROLLARIO IV.

165. Lo spazio, come preesistibile alla materia, può esistere senza di essa.

COROLLARIO V.

166. Viceversa poi non si può distrugger lo spazio, senza che resti distrutta la materia.

PROPOSIZIONE XIX.

167. *Lo Spazio è infinito.*

Se non è tale, sarà limitato; dunque i suoi limiti confineranno o col nulla, o con la materia; giacche fuor dello spazio, e della materia, non è nota, eccetto le sostanze spirituali, altra creatura, come gia si accennò (133.). Se il primo; esi-

esisterebbe il nulla, il che è assurdo (60.). Se il secondo; non potendo esister la materia senza il luogo preesistente (158.), e non potendo questo esser distrutto senza che ancor essa distruggasi (166.), ne segue, che confinando l'estremità dello spazio limitato con la materia per l'ipotesi, dovrà necessariamente confinare con altro spazio; onde il limite assegnato allo spazio non sarà limite; ma siccome ogni altro limite assegnatoli non potrà per il medesimo ragionamento esser limite, e così in infinito; ne verrà, che lo spazio debba esser necessariamente infinito; il che &c.

S C O L I O I.

168. Si poteva ciò dimostrare anche in altra maniera, supponendo, giacche lo spazio è penetrabile (164.), che un globo materiale venisse collocato all' ultimo lembo del suo confine in modo, che fosse tangente della sua estremità, ma che per altro rimanesse tutto dentro il detto spazio. Si domanda poi, se giacendo un uomo sovra tal contatto possa, o non possa alzare un braccio fuor di esso. Se concedesi; dunque tal braccio avrà ricetto nel nulla, ed il nulla esisterà, il che è assurdo (60.). Se negasi; dunque vi sarà un ostacolo, il quale sarà formato o da altra confinante materia, o dal nulla, e però si ricaderebbe nel medesimo assurdo, se il nulla esistesse; o il detto limite dello spazio non sarebbe più limite, dovendo continuare con quell' altro spazio contiguo, che da luogo alla materia resistente al detto braccio; il che sarebbe contro l' ipotesi.

Lu-

Lucrezio c' insegna, che fino de' suoi tempi era noto un simile argomento, il quale non è mai stato finora abbattuto. Eccone l' espressione (e):

Praeterea si jam finitum constituatur
Omne quod est spatium: si quis procurrat ad oras
Ultimus extremas, jaciatque volatile telum,
Invalidis utrum contortum viribus ire,
Quod fuerit missum, mavis; longeque volare;
An prohibere aliquid censes, obstareque posse?
Alterutrum fatearis enim, sumasque necesse est.
Quorum utrumque sibi effugium praecludit, & omne
Cogit, ut exempta concedas fine patere.
Nam sive est aliquid, quod prohibeat, faciatque
Quo minu' quo missum est, veniat, finique locet se:
Sive foras fertur, non est a fine profectum.
Hoc pacto sequar; atque oras ubicunque locaris
Extremas, quaeram, quid telo denique fiat.
Fiet uti nusquam possit consistere finis:
Effugiumque fugae prolatet copia semper.

COROLLARIO I.

169. Essendo lo spazio infinito per ogni verso (167), e però un infinito assoluto (17), dovrà essere necessariamente immobile.

Co-

(e) *Lib. I.*

COROLLARIO II.

170. Siccome ciò, che è necessariamente immobile, è indivisibile (48.), tale sarà ancora lo spazio.

COROLLARIO III.

171. Giacchè lo spazio è immobile (169.), e indivisibile (170.), e nell'atto istesso penetrabile (164.); ne segue, che un corpo collocatovi non potendo nè alterarlo, nè distruggerlo con tal collocazione (163.), deve esistere congiuntamente con esso senza che l'uno turbi l'esistenza dell'altro.

COROLLARIO IV.

172. Dunque lo spazio sarà ancora impassibile.

COROLLARIO V.

173. Dunque nè la materia esercita azione sullo spazio, nè lo spazio sulla materia.

SCOLIO II.

174. Tutte le idee, o nozioni, che noi abbiamo delle cose, non sono gia innate in noi, come il sagacissimo Locke (a) l'ha diffusamente dimostrato, ma ci sono state primiera-

(a) *Essai Philos. concern. l'Entend. Humain L. I.*

ramente presentate alla fantasia da i nostri sensi, ed in seguito l' abbiamo arbitrariamente combinate, ed alterate per mezzo della riflessione. Che le nostre idee non siano innate, deducesi ancora dalle sacre pagine, come parmi, che giudiziosamente osservi un altro Autore Inglese [a]. Io ne porrò qui l' estratto fattone a tal proposito dal Dott. Maty [b]. „ Le cognizioni (egli dice) de' nostri primi Padri non erano secondo il nostro Autore nè straordinarie, nè sublimi, „ e tutto ciò, che è piaciuto a Milton di raccontarne, non è „ altro, che una bella finzione. Non pare, che Adamo fosse creato Filosofo perfettamente istruito della Natura di „ Dio, e di quella di tutte le Creature. I fatti riportati „ da Moisè smentiscono questa opinione. Animato che ei fu, „ la sua anima fu racchiusa in un corpo, che ne limitava „ le operazioni, che la riduceva a non istruirsi, che lentamente, successivamente, ed a misura che i suoi sensi fornivanli nuove idee. L' immagine di Dio, a somiglianza „ della quale esso fu creato, non significa, che fosse dotato „ di tutta la perfezione, di cui egli era suscettibile, ma „ semplicemente, che la forma esteriore non era simile a „ quella d' alcun' altra Creatura, che era superiore ad ogn' altra, e come diremmo, divina; e che quanto alla sua anima, ella era stata creata immortale, e lo rendeva in „ tal guisa un' immagine dell' immortalità istessa di Dio „.

175. Il Leibnizio nelle sue riflessioni sovra Locke [c], pretenderebbe, che vi fossero delle idee innate, e tra l'altre ge-

(a) Schuckford *The Creation and fall of man &c.*

(b) *Journ. Britann. pour les mois de Sept. & d' Oct. 1753. Art. II. pag. 49.*

(c) *l. cit. pag. 403.*

generalmente impresso il principio di contraddizione (51.); ma se ciò fosse, non vi sarebbe persona, che non l'avesse perpetuamente presente; eppure per la prova, che ne ho fatto, moltissime persone idiote muojono, o sono molto vissute, senz'averne mai avuto la minima idea; anzi volendogliela io comunicare, alcuni hanno durato qualche fatica a intenderla, essendomi convenuto replicar loro l'interrogazione. I Ragazzi poi d'una tenera età non ne intendono nulla affatto. Che più? I Filosofi stessi Leibniziani smentiscono la suddetta asserzione del loro Maestro: ed eccone il riscontro. Pretende il Wolfio, e dopo di esso Formey, come altrove ho notato (54.), che dal principio della Ragione sufficiente provenga quello ancora di contraddizione; dunque a buon conto il principio di contraddizione sarebbe secondario, e primario quello della ragione sufficiente, e però questo, e non quello dovrebbe essere stato improntato nell'anima nostra; ma non si ha da far altro, che ripensare al passato, per convincersi del contrario; mentre nella nostra puerilità, ed anche nell' adolescenza, non ne abbiamo avuto la minima idea. Per altro qual maggior convizione, che il vedere un acerrimo fautore di questa ragion sufficiente, come il Leibnizio, che la cercava da per tutto, non accorgersi, che questa (posta per vera la dottrina Wolfiana) era di data anteriore alla Identicità? In somma la discrepanza tra'l Wolfio, e il Leibnizio in fissare il primato tra l'una, e l'altra decide, che niuna di due è innata nell'anima nostra, e in conseguenza, passando amendue per i soli principj semplicissimi, e generalissimi, niun principio è innato nella medesima.

176. Giacche dunque debbono i sensi essere il veicolo principale delle nostre successive cognizioni, ed essi non possono, se non dal materiale, ricevere impressione, come pure disse Lucrezio [a]:

Tangere enim & tangi, nisi corpus, nulla potest res;

ne segue necessariamente, che noi non possiamo avere cognizione alcuna diretta della natura dello spazio, e perciò non possiamo formarci di esso alcuna idea, se non negativa, come negativa è pure l' idea dell' Infinito, quantunque con varie proprietà sembri risuonare sulle bocche di alcuni Filosofi, i quali bisognando ne propagano la specie.

S c o l i o III.

177. Piacemi in questa occasione di trasferir qui una spiritosa riflessione del celebre Mr. Voltaire. „ Des-Cartes „ (egli dice) [b] ammetteva un Dio Creatore, e Causa di „ tutto, ma negava la possibilità del vuoto. Epicuro nega- „ va un Dio Creatore, e Causa di tutto, ed ammetteva il „ vuoto. Or doveva Des-Cartes per i suoi principj negare „ un Dio Creatore, ed Epicuro doveva ammetterlo. Ecco- „ ne la prova evidente. Se il vuoto fosse impossibile, se „ la materia fosse infinita, se l' estensione, e la materia fos- „ sero la medesima cosa, bisognerebbe, che la materia „ fosse necessaria. Or se la materia fosse necessaria, esistereb- „ be

(a) *Lib. I.*
(b) *Oeuvres de* Voltaire *T. 6. Chap. II. pag. 28. à Dresde* 1748.

„ be per ſe medeſima per neceſſità aſſoluta, inerente alla „ ſua natura primordiale, antecedente a tutto; dunque ella „ ſarebbe Dio; dunque colui, che ammette impoſſibilità del „ vuoto, deve, ſe ragiona per conſeguenze, non ammette- „ re altro Dio, che la materia. Al contrario, ſe vi è il „ vuoto, la materia non è dunque un Ente neceſſario, eſi- „ ſtente per ſe medeſimo &c., perche chi non è in ogni „ luogo, non può eſiſter neceſſariamente in alcun luogo. „ Dunque la materia è un Ente non neceſsario; dunque è „ ſtata creata; dunque toccava a Epicuro a credere, io non „ dico, Dei inutili, ma un Dio Creatore, e Governatore; „ e toccava a Des-Cartes a negarlo. Perche dunque Des- „ Cartes al contrario ha ſempre parlato dell'eſiſtenza d'un „ Ente Creatore, e Conſervatore, ed Epicuro l'ha rigetta- „ to? Perche gli Uomini tanto ne' loro ſentimenti, che „ nella loro condotta, ſeguono di rado i loro principj, e „ perche i loro Siſtemi, come le loro vite, ſono tante con- „ traddizioni.

PROPOSIZIONE XX.

178. *La Materia non è un infinito aſſoluto.*

La materia è eſteſa per ogni verſo; dunque ſe foſſe infinita, avrebbe un'eſtenſione infinita per ogni verſo, e però occuperebbe interamente l'infinito ſpazio (167.). Ma la materia è mobile, e il moto è incompatibile col pieno perfetto materiale (156.), e con l'infinito aſsoluto; dunque la materia non è un infinito aſſoluto (17.); il che &c.

CAPITOLO QUINTO.

Del Tempo.

PROPOSIZIONE XXI.

179. Ciò, *che chiamiamo Tempo, non può esser cosa reale.*

Supposto reale, è chiaro, che non può esser constante, cioè immobile; poiche qualunque operazione sarebbe passata, presente, e futura nel punto istesso. Non può esser nemmeno dotato d'estensione per ogni verso infinita, perche essendo immobile, ricaderebbe nel medesimo assurdo. Non potendo dunque esser immobile, suppongasi mobile. Ma non può esser una cosa mobile limitata; imperciocche per quanto fosse grande la sua estensione, pur finalmente dovrebbe per il suo moto rapidissimo lasciar varie regioni successivamente allo scoperto, onde ne seguirebbero di mano in mano più inconvenienti, cioè in alcuni Paesi vi sarebbe il tempo, ed altri ne resterebbero sprovvisti; onde non si potrebbe sapere di qualunque azione nè il *prima*, nè il *poi*. In oltre tal corso di tempo, per quanto grande si supponesse la sua estensione, pur finalmente dovrebbe cessare di passar tutto quanto sulla materia; essendo que-

sta limitata (178.), ed allora non vi sarebbe più tempo nell'ordine materiale, ma passando il detto tempo ad immergersi totalmente nello spazio, ne sarebbe il solo spazio, cioè una perfetta immutabilità (169.), suscettibile. Se si volesse supporre, che si aggirasse intorno alla materia, formandovi una specie di vortice, siccome i circoli i più prossimi al centro del moto sarebbero i meno veloci, e viceversa, la medesima azione non interrotta si calcolerebbe da per tutto fatta in tempi diversissimi, il che sarebbe una confusione. Se si supponesse infinito da una parte, e dall'altra continuamente fluente come un fiume, bisognerebbe, o che egli si muovesse tutto d'un pezzo senza mutar luogo dalla parte infinita, o che questa parte infinita mutasse successivamente di luogo; amendue inconvenienti. In somma finito, o infinito che sia da una parte, bisogna supporre, che dall'altra si allunghi continuamente senza alterare la sua situazione, il che non può fare senza continuamente riprodursi. In tal caso o egli è increato, o creato. Se increato: ciò, che non ha avuto principio, si verrebbe a produrre. Se creato: da se non può proseguire a crearsi, onde sarebbe un'occupazione continua del Creatore, il quale avrebbe prodotto una creatura, che non potrebbe terminar mai di creare: amendue inconvenienti.

Ma si può far vedere, che Dio non lo potrebbe nè creare, nè distruggere; imperciocchè è certo, che Dio, come dice l'Ecclesiaste [a], creò prima d'ogni altra cosa la *Sapienza*, cioè le Intelligenze, o sostanze sprituali; *prior omnium creata est Sapientia*. Creò poscia il Cielo, e la Terra; or

(a) *Cap. I. V. 4.*

or il *prima*, ed il *poi* sono inseparabili dall'idea di ciò, che chiamasi tempo; dunque Dio ha posto all'atto le creature nel tempo. Se negasi: o non sono state ancor create, il che sarebbe contro il passo riportato; o esistono ab eterno, il che è contro le parole: *In principio creavit Deus Cœlum, & Terram;* avendole dunque Dio create in tempo, ed avendo esistito prima, e dopo tal creazione, è chiaro, che anch'egli esisterebbe in tempo; ma esiste ab eterno; dunque il tempo in tutta la sua estensione, cioè l'eternità, se fosse una cosa reale separata da Dio (giacche non può esser Dio medesimo come constante di caratteri incompatibili co' divini), sarebbe un Ente coeterno a Dio, e perciò increato. Dunque non avendolo Dio potuto creare, non lo potrebbe in conseguenza distruggere, e però dovrebbe allungarsi da se all'infinito, e generarsi di pianta successivamente, senz' aver pascolo altronde, per cui crescere; vale a dire, sarebbe una cosa increata insieme, e creabile; il che è assurdo (59.); dunque il tempo non ha esistenza assoluta; il che &c..

COROLLARIO I.

180. Il TEMPO è dunque appresso di noi totalmente ideale, come cosa relativa fabbricata dal nostro modo di pensare, e dal nostro bisogno.

SCOLIO I.

181. Ciò, che chiamiamo TEMPO, non significa realmente altro appresso di noi, che una successione uniforme, e continua

nua dell'esistenza delle cose. In fatti quando riguardiamo un corpo, che si mantiene in uno stato di moto, o di quiete, mentre accade interrottamente un ordine di cose successive, noi diciamo, che quel tal corpo è stato tanto tempo in moto, o in quiete, computando dal numero di tali cose successe l'una all'altra, la durata di quel moto, o di quella quiete. Similmente dalla successiva mutazione delle nostre idee possiamo giudicare della maggiore, o minor durata delle cose. Di quest' ordine adunque successivo, ed uniforme, che consideriamo in faccia alla durata di qualche cosa, cioè alla persistenza nello stato, in cui trovasi, ci siamo serviti così costretti dalla necessità per fare una misura, che chiamiamo TEMPO, rappresentandocelo come una grandezza continuatamente crescente, il che conferma la definizione, che se n' è data (28.).

COROLLARIO II.

182. Giacche ci possiamo in tal guisa rappresentare il tempo, senza che egli sia realmente esistibile, il pretendere, che Dio l'abbia creato, sarebbe un offenderne gli attributi (61.).

COROLLARIO III.

183. Siccome il tempo è relativo al moto, non potendosi dar questo realmente istantaneo (25.), non può esser nemmen tale il tempo, ed in fatti successione di cose, e istante perfetto sono contraddittorj; il medesimo dicasi della consecuzione delle nostre idee; possiamo dunque dividere il

tem-

tempo in quante parti ci piace, confiderandolo come una linea retta, o altrimenti; ma non poffiamo nè concepirlo, nè fupporlo infinitamente piccolo, fe non relativamente a un tempo eforbitante (86.).

S c o l i o II.

184. Il medefimo vogliono efprimere i Geometri, quando nominano i loro iftanti, o tempufcoli. L'ifteffo intendafi allorche fuppongono uno fpazio infinitefimo, o inaffegnabile, che il mobile debba fcorrere in un tempufcolo; tutti e due fono così fuppofti per adattarvi il calcolo infinitefimale, e non perche dianfi di fatto (87.).

Corollario IV.

185. Se ceffaffe totalmente il moto, o la fucceffione delle noftre idee; o pure fe fi perfifteffe continuamente in un'idea fola; in fomma fe ceffaffe affatto l'ordine confecutivo delle cofe fifiche, e ideali; è chiaro, che non vi farebbe più il tempo.

Corollario V.

186. Per quanto un circuito di moti, o d'idee, confiderato relativamente alla durata d'un'azione, torni più volte da capo a rifare il fuo corfo fempre nell'ifteffo modo, tutte le azioni confecutive fatte in ciafcuno de i detti eguali circuiti faranno efeguite in tempi eguali; il che dà l'idea del-

dell'eguaglianza, e dell'ineguaglianza; dell'identità, e della diversità del tempo.

S C O L I O III.

187. Il Cav. Newton credeva il tempo realmente esistente: eccone la ragione con le parole del sovrallodato M. „ Voltaire [a]. Conviene (questi dice) secondo Newton pen„ sare della durata come dello spazio, cioè che sia una co„ sa reale, poiche se la durata non fosse altro, che un ordine „ di successioni tra le creature, ne seguirebbe, che ciò, che fa„ rebbesi al giorno d'oggi, e ciò, che fu fatto migliaja di an„ ni prima, sarebbero per loro stessi fatti nel medesimo istan„ te, il che è contraddittorio „. Questo argomento per altro con tutto il rispetto dovuto a un Uomo sì grande, quale era Newton, non parmi convincente; anzi sembrami un sofisma; imperciocche ripugnando, che la natura resti un sol momento oziosa (63.), ne segue, che dal principio del Mondo in poi vi dev'essere stato necessariamente un ordine successivo non interrotto giammai; quindi la durata d'oggidì si ripeterà da un ordine di successioni, che non potrà esser mai quello di mill'anni prima, quantunque ancor questa da un ordine di successioni ripetasi, giacche quest'ordine di successioni è onninamente inseparabile dall'idea d'anteriorità, e di posteriorità; onde i detti due ordini successivi non potendo mai esser l'istessa cosa, non se ne può dedurre, che le dette due durate debbano essere accadute nell'istesso istante, se però l'espresione *ordine successivo* non si pigliasse astratta-

N men-

(a) *Oeuvres T. 6. Chap. II. pag.* 27. *a Dresde* 1748.

mente per un Ente sostanziale, il che sarebbe un realizzare un'idea astratta, o una voce, contro le buone regole del raziocinio (69.).

PROPOSIZIONE XXII.

188. *Tra le cose create non v'è altro infinito assoluto, se non lo Spazio.*

L'infinitamente piccolo assoluto non è possibile (86.); la materia non è un infinito assoluto (178.); il tempo non può esser cosa reale (179.), le sostanze spirituali, eccetto Dio, non sono ammesse, nè si possono ammettere assolutamente infinite. Or fuori di tali cose non evvi a notizia umana tra le cose create, che il solo spazio, e questo si è dimostrato, essere un infinito assoluto (167.); dunque lo spazio tra le cose create è il solo infinito asoluto; il che &c.

SCOLIO I.

189. Si presenteranno qui i Geometri co' loro Asintoti, e con l'aree asintotiche, credute da loro realmente infinite; anzi ve ne saranno di quelli, come il Wallis, e il Padre Grandi (amendue per altro d'un merito sommo) i quali contro il Varignon, e il Leibnizio pretenderanno, che diansi anche i più che infiniti, unito a' quali il Fontenelle produrrà ad un bisogno la sua Aritmetica degl'infiniti. Ma per istrigarsi da questi abissi mentali, basta considerare che tutti questi mostri incompatibili con la buona Metafisica sono parti della pretesa divisibilità all'infinito, la quale sparendo in

in faccia alle definizioni geometriche (110.111.), e alla forza degli addotti ragionamenti (103. 108. 126. 127.), vengono a ſparire anche i ſogni, e le larve degli Aſintoti, e delle aree aſintotiche, onde tutte le gerarchie capriccioſe di tali infiniti riguardate da tanto tempo con particolare ſtupore riduconſi a puri Romanzi Geometrici, come ſpero di meglio dimoſtrare nel ſecondo Tomo di queſt' Opera.

190. Ma nemmeno i lati d' un Poligono, in cui ſuol riſolverſi un perimetro curvilineo, come ſarebbe la periferia circolare, dir ſi poſsono di numero infinito, come pretendono comunemente i Geometri, ſe non in ſenſo tropico, o figurato; imperciocche ſe lo pretendeſsero in un ſenſo aſsoluto, ſiccome un numero realmente infinito di lati deve eſser collocato in un luogo limitato, biſognerebbe, che ſupponeſſero poſſibile l' infinitamente piccolo reale, che è totalmente inſoſtenibile (86.).

191. L' inconſideratezza d' alcuni è anche arrivata a pretendere, che ſi poſſa ſupporre una linea realmente infinita da una, o da ambe le parti; ma ſe gli Uomini, che hanno inventato di pianta la linea, ſono d' immaginazione limitata, è certo, che non potranno mai concepire una linea infinita; e ſe non poſſono in alcun modo concepirla, perche pretendono di poterla ſupporre tale? Ma ſupponghiamola aſſolutamente infinita da amendue le parti; per eſsere ancor ſuppoſta diviſibile, non mi ſi potrà negare, che io da tal linea poſsa togliere una lunghezza a piacere, che ſia ex. gr. di quattro braccia. Tolgaſi. Domanderò, ſe dopo tal defalco la detta linea ſeguiterà ad eſsere infinita, o ſe ceſserà di eſserlo? Se il primo: io le renderò le toltele quattro braccia, e in

N 2 con-

conſeguenza l' accreſcerò di lunghezza. Se il ſecondo: l' infinito, e il finito non differiranno fra loro, che di quattro braccia; conſeguenze amendue incompatibili coll' idea dell' infinito in queſtione, cioè della lunghezza perfettamente interminabile. Se mi diranno, che ſi può ſupporre la linea retta interminabile da una ſola parte: ſiccome non v' è ragione, per cui una linea debba eſser ſuppoſta più in un luogo, che in un altro, io potrò ſupporre due tali linee poſte per diritto, vale a dire, ſommate, e domanderò, ſe le loro eſtremità vengono per l' appunto a toccarſi, o ſe qualcoſa manca, o eccede per la formazione d' una ſola linea retta. Nel primo caſo ſi ſupporrebbe la linea perfettamente interminabile gia rigettata. Nel ſecondo, e nel terzo caſo a voler che le dette eſtremità giungano a toccarſi per l' iſteſſa direzione (qual ſuppoſizione non può eſser negata, perche viene ammeſsa la ſomma degl' infiniti), biſognerebbe, che l' infinito foſse tirato avanti, o in dietro più, o meno, quanto occorreſse; ovvero nel ſecondo caſo per fare un' infinita lunghezza mancherebbe una lunghezza finita; e nel terzo ſi darebbe una lunghezza maggiore della lunghezza infinita; tutti inconvenienti.

192. Forſe replicheranno, che eſsendo lo ſpazio, per quanto ſi è ſtabilito (188.), un infinito aſsoluto, può Dio per tutta la ſua illimitata eſtenſione creare, o aver creato una ſtriſcia di materia, o una linea fiſica realmente interminabile da uno, o da amendue i lati; ma io riſpondo, che nemmeno queſto ſi può ſupporre, perche ſi ſupporrebbe ancora, che Dio aveſse per queſto verſo eſaurita la ſua onnipotenza, e però ſi ſarebbe ſuſcettibile del principio di contraddizione; il

che

che è asfurdo. Sparifcano dunque una volta quefti Paefi incantati degl'infiniti, i quali, eccetto lo fpazio, non in natura, ma efiftono foltanto nella rifcaldata fantafia de' Geometri; o volendoli ammettere, tanto grandi, che piccoli, non fi ammettano, fe non come inasfegnabili (87.), e relativi (13.).

SCOLIO II.

193. Giacche trattafi dell'infinito, non pofso difpenfarmi dal fare una rifleffione fovra un rapporto mefso frequentemente in ufo da' Geometri. Quefti confiderano il zero come il nulla affoluto, e pretendono, che tra effo, e l'unità corra una relazione, come tra l'unità, e l'infinito affoluto; ma ripugna con loro pace, che tra'l *nulla affoluto*, e il *qualcofa* fia poffibile qualunque relazione finita, o infinita (60.). Di più fe tra'l zero, e l'unità corre un rapporto infinito reale, fi avrà l'analogia $0:1::1:\infty$; e moltiplicando i medj, e gli eftremi, fi avrà $1=0\times\infty$; dal che deducefi, che il nulla affoluto prefo infinite volte diventa eguale a quella quantità, che uno vuole; il che nuovamente è affurdo (59.). Per intender dunque in qual fignificato debbafi pigliare il rapporto del zero all' unità, riflettafi 1.) che fe una quantità finita fommafi con una quantità, rifpetto ad effa inaffegnabile, l'aggregato è una quantità finita. 2.) Se da una quantità finita fi fottrae una quantità, che è rifpetto ad effa inaffegnabile, il refiduo è una quantità finita. 3.) Se una quantità finita moltiplicafi per un' inaffegnabile, il prodotto diventa una quantità inaffegnabile. 4.) Se una quantità finita di-

ſi videſi per un' inaſſegnabile, il quoto diviene un' numero eccedente, ed enorme, dimodoche il denominatore al numeratore acquiſta un rapporto inaſſegnabile, ma non mai realmente infinito. Suppongaſi ora, che il zero ſia l'iſteſſa coſa, che è una quantità inaſſegnabile, vedraſſi, che riguardo a' noſtri uſi le quattro operazioni dell' Aritmetica porteranno al medeſimo fine. Dunque il zero nei ſimboli geometrici dovendo eſprimere qualche relazione affermativa, o negativa, ovvero dovendo eſſer ſommato, o ſottratto da una quantità notabile, sarà ſempre la figura d'una quantità infiniteſima, ovvero d'un' inaſſegnabile; ed allora moltiplicato con un numero di quantità finite, che riſpetto ad eſſo paſſa riguardo a' noſtri uſi per un infinito, darà per prodotto una quantità finita; onde s'avvererà in tal ſenſo la ſovr'eſpoſta analogia, che altrimenti ſarebbe una ſtravaganza.

CA-

CAPITOLO SESTO.

Della forza di aderenza annessa intrinsecamente agli Atomi, e considerata come un carattere generale della materia, indispensabile per l' effettuazione de' fenomeni, che in natura si osservano.

❋§§❋ ❋§§❋

PROPOSIZIONE XXIII.

194. *GLi Atomi, o corpi primordiali posti nel Vuoto, quando altra causa non vi fosse concorsa, sarebbero rimasti immobili in quella situazione, in cui fossero stati collocati.*

Imperciocchè siccome fuor di essi non si danno altri corpi (131.), non vi poteva essere cosa esteriore, che in loro producesse alcun cangiamento. Per loro stessi poi non v' è ragion sufficiente, per cui più in un luogo, che in un altro dovessero muoversi (98.N.1.); dunque dovevano restar immobili perpetuamente; il che &c.

PRO-

PROPOSIZIONE XXIV.

195. *Impresso da una forza esteriore negli Atomi rimasti immobili nel Vuoto un moto qualunque per varie direzioni, si sarebbe questo in parte estinto ne' primi incontri; in parte si sarebbe andato successivamente estinguendo.*

Si sono gli Atomi dimostrati durissimi (128.); ma nelle vicendevoli percosse i corpi duri, per quanto insegnano i Geometri, perdono continuamente il moto impressoli; dunque gli Atomi in questione dovevano in breve tempo ridursi alla quiete; il che &c.

SCOLIO.

196. Fanno i Leibniziani la guerra a' corpi duri, pretendendo, che se questi esistessero, resterebbe violata la legge di *continuità*, e la natura in conseguenza agirebbe per salto, il che stimano essere un inconveniente. Siami permesso, per dare un'idea di questa legge, di trasferir qui le parole del celebre Gio. Bernoulli, come le traduce il dottissimo Padre Riccati (a). „ In effetto un somigliante „ principio di durezza non potrebbe esistere. Egli è una „ chimera, che ripugna alla legge generale, che la ma„ teria osserva constantemente in tutte le sue operazioni. Io „ parlo di quell' ordine immutabile, e perpetuo stabilito „ dalla creazione dell' Universo, che si può appellare leg„ ge

(a) *Dialogo delle forze vive, e dell' azioni delle forze morte, Giornata X. pag.* 344., e 345.

„ ge di *continuità*, in virtù della quale tutto ciò, che si
„ eseguisce, si eseguisce per gradi infinitamente piccoli. Sem-
„ bra che il buon senso detti, che verun cangiamento non
„ possa farsi per salto; per salto non opera la natura. Non
„ v'ha cosa, che passar possa da un'estremità all'altra, senza
„ passar per tutti i gradi di mezzo. E qual connessione
„ si concepirebbe tra due estremità opposte indipendente-
„ mente da ogni connessione di ciò, che è tra mezzo? Se
„ la natura potesse passare da un estremo all'altro, per e-
„ sempio dal riposo al movimento, dal movimento al ri-
„ poso, da un movimento al contrario, senza passar per
„ tutti li movimenti insensibili, che conducono dall'uno
„ all'altro, egli converrebbe, che il primo stato fosse di-
„ strutto, senza che la natura sapesse a quale ella dovesse
„ determinarsi; giacche per qual ragione la natura ne pre-
„ ferirebbe uno in particolare, di cui si potrebbe chiede-
„ re, perche questo più tosto che qualunque altro? Concios-
„ siache non essendovi legamento alcuno necessario tra que-
„ sti due stati, niente di passaggio dal movimento al ri-
„ poso, dal riposo al movimento, o da un movimento
„ all'opposito, ragion veruna non la determinerebbe a pro-
„ durre una cosa più tosto, che l'altra.

„ So che nella natura vi sono parecchie volte effetti
„ sì pronti, che non si distingue alcun intervallo tra il
„ cominciamento, ed il fine dell'azion loro; ma segue egli,
„ che perciò non ve n'abbia? E quelli, che sono convinti,
„ che tutti i generi di quantità sono divisibili all'infinito,
„ avranno eglino difficoltà di dividere il più insensibile tempo
„ in numero infinito di parti piccole, e di collocarvi tut-

„ ti i gradi possibili di velocità dal riposo fino ad un mo-
„ vimento determinato, per esempio dal cominciare fino al
„ dissiparsi d' un lampo?

„ Concludiamo dunque, che la durezza presa nel senso
„ volgare è assolutamente impossibile, e non può sussistere
„ colla legge di *continuità*. Un poco di riflessione mette-
„ rà questa verità nel suo lume. Supponghiamo, che due
„ corpi duri in questo senso, e perfettamente eguali si ri-
„ scontrino direttamente, con velocità eguali. Io dico, che
„ dovranno per necessità fermarsi tutti ad un colpo in ur-
„ tandosi, o dopo l' urto per lo stesso cammino tornare
„ indietro; giacche cosa assurda sarebbe, che due corpi
„ duri si penetrassero. Ma questi corpi non potrebbero ad
„ un colpo fermarsi senza passar di botto dal movimento
„ al riposo, dall' essere al non essere, ciò, che ripugna alla
„ legge di *continuità*; nè potrebbero rifletters nel secondo ca-
„ so, cioè a dire, cangiar le velocità loro affermative in
„ velocità negative, senza aver toccate avanti tutte le di-
„ minuzioni successive dalla primiera velocità fino alla total
„ sua distruzione, e senza acquistare per somiglianti ac-
„ crescimenti una velocità in senso contrario; ciò che è
„ egualmente opposto a questa legge „.

„ E queste ragioni son di tal sorta, onde non mi
„ sembra punto possibile, che la durezza presa in quel sen-
„ so, che per noi si rigetta, possa quadrare alle leggi fon-
„ damentali della natura. Perciò io rigetterò li pretesi Ato-
„ mi perfettamente solidi, che parecchj Filosofi hanno am-
„ messi. Questi sono corpuscoli immaginarj, che non han-
„ no realtà, se non nell' opinione de' difensori loro „.

Il

197. Il Padre Boscovich gran difensore di questa legge di *continuità*, sopra la quale posa la dimostrazione diretta del suo in parte accennato Sistema (90.), dice anch' esso, che una forza opposta ad un corpo messo in moto, nel ridurlo alla quiete, deve, per salvar la legge di *continuità*, diminuirne la velocità, col farlo passare per tutte le velocità decrescenti intermedie fra 'l moto, e la quiete. *Hinc autem* (sono sue parole) *etiam in velocitatis productione in mechanica consequitur illud: nullum mobile ab uno aliquo velocitatis gradu transire ad quietem, vel ad majorem velocitatem, nisi per omnes intermedias velocitates transeundo* (a). Posto ciò dopo d'aver pronunziato, che se due corpi duri dopo l'urto passassero subito a causa dell'immediato contatto dal movimento alla quiete, si darebbe il salto in natura, che per lui è un orrore: ne tira la conseguenza, che non possono mai venire al contatto con le medesime velocità, che prima avevano, e perciò gli è giuoco forza il diminuire successivamente queste velocità allorche sono in viaggio, dimodoche la loro differenza avanti il contatto, o al più nel contatto, totalmente svanisca. Ma perche non v'era ragion sufficiente, che questa velocità da se sola diminuisse, per mantenersi sempre la materia nello stato, in cui trovasi, o di moto, o di quiete (98.), ha chiamato in ajuto, coerentemente all' apparenza d'alcuni fenomeni, una forza ripulsiva fasciante in sfera, ed attorniante i corpi, della quale si serve per fare, che una tal velocità resti successivamente diminuita fino all' intera estinzione.

O 2 A me

(a) *Diss. de materiæ divisibilitate, & principiis corporum* §. 68. *V. Mem. sovra la Fisica, e Istoria naturale di diversi Valentuomini T.* 4. *p.* 221.

A me per altro questa legge di *continuità* non solamente non fa grand' impressione, almeno riguardo al moto, e alla quiete, ma tengo, che il corpo in moto non possa ridursi alla quiete, se non per salto, ed eccone la ragione.

Giacche un corpo in moto volendo ridursi alla quiete, deve passare per tutte le velocità intermedie decrescenti, io domando, se quella velocità, che si suppone immediatamente previa alla quiete, sia quanta, o non quanta. Se quanta: essendo, secondo i principj de' Fautori di tal Sistema, divisibile in altre minori, non resterà realmente svanita la differenza, che passa dalla prima velocità all' ultima, e perciò il corpo non sarà passato per tutte le velocità possibili decrescenti, e così sempre; il che è contro l'ipotesi. Se non quanta: si darà la velocità infinitesima reale, cioè si darà l'infinitamente piccolo assoluto; il che è assurdo (86.). Dunque non potendo accadere il secondo, e non essendovi altro caso fuori del primo, o il corpo in moto non potrà mai ridursi alla quiete, o verrà violata la legge di *continuità*; ma la prima deduzione è ocularmente falsa; dunque dovrà avverarsi la seconda; e però il corpo nel passare dal moto alla quiete deve ridurvisi necessariamente per salto.

198. Per maggior chiarezza, giacche la velocità infinitesima assoluta non può darsi, e che perciò la velocità immediatamente previa alla quiete dev' esser quanta, vadansi incontro due corpi eguali con quella velocità ultima, dopo la quale deve accadere immediatamente la quiete; appena essi entreranno nella reciproca loro sfera ripulsiva, è chiaro, che dovranno per questa opposizione ridursi di colpo alla quiete; altrimenti la fissata velocità non sarebbe l' ultimamente previa

alla

alla detta quiete, contro l'*ipoteſi*; il che dimoſtra, che il paſſaggio dal moto alla quiete deve indiſpenſabilmente ſuccedere per ſalto.

199. Conſideriamo ora inverſamente la queſtione (74). Se un corpo, che è in moto, deve paſſare alla quiete per tutti i gradi intermedj di mobilità, anche vicendevolmente un corpo, che è in quiete, dovrà, per evitare il ſalto, ſcorrere per varj gradi di quiete prima di giungere al moto. Qual mente ſana è ſuſcettibile di ſimile ſtravaganza? Ma ſe non dovrà paſſare per tutti i gradi di quiete, ſiamo da capo; poiche o dovrà paſſare addirittura nella ſerie creſcente de'moti per un moto realmente infiniteſimo, o per un moto quanto; ma il primo ripugna; dunque ſarà vero il ſecondo, e però ſarà inevitabile il ſalto a diſpetto della legge di *continuità*. A me per altro ſembra, che il volere adattare la legge di *continuità* al moto, e alla quiete ſia l'iſteſſo, che il volerla adattare al contatto, e non contatto; e ſfido chiunque a farmi intendere, che un corpo nel laſciar di toccare in un punto un altro corpo debba paſſare per tutti i gradi decreſcenti di contatto per giungere al non contatto, o alla diſtanza. Ma parmi tempo perduto il maggiormente trattenermi ſu tal ſoggetto, e laſcio ad altri l'eſaminare le oppoſizioni fattevi da M. de Maupertuis [a], e da M. Mac-Laurin [b].

200. Inſorgono qui altri emuli, i quali pretendono di proſcrivere i corpi duri, per la ragione, che dandoſi queſti, la ſomma delle forze vive dopo la percoſſa non ſi conſerve-

reb-

(a) *Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc. & bell. lettr. de Berlin. an.* 1746.

b) *Decouvertes Philoſophiques de M.* Newton *trad. de l'Angl. liv. I. Chap. IV. p.* 90. *liv. II. Chap. p.* 124.

rebbe. Ma risponde per me M. de Maupertuis [a], dicendo: „ Des-Cartes ammesse questi corpi duri, e credette d'aver trovato le leggi del loro moto. Egli si era partito da un „ principio assai verisimile, che *la quantità di moto conservasi sempre l' istessa in natura*. Ne dedusse delle leggi false, perche il principio non è vero. I Filosofi, che son „ venuti dopo di lui, son rimasti impressionati d' un' altra „ conservazione; questa vien da essi chiamata *Forza viva*, „ che è il prodotto della massa nel quadrato della sua velocità. „ Essi non hanno gia fondato le loro leggi di moto su questa conservazione, hanno bensì dedotto questa conservazione „ dalle leggi del moto, di cui hanno veduto, che ella era una „ conseguenza. Per altro siccome la conservazione della forza viva non aveva luogo se non nell' urto de' corpi elastici, si sono confermati nell' opinione, che non si desssero „ altri corpi fuori di essi in natura „.

„ *La conservazione del moto non è vera, che in alcuni* „ *casi. La conservazione della forza viva non ha luogo, che* „ *per alcuni corpi. Nè l' una, nè l' altra può passare per un* „ *principio universale, nè per un risultato generale delle leggi del moto* „.

201. Vi è un altro ostacolo da sormontare, che trovasi nel sovrallodato Padre Riccati [b]. „ Abbiamo (dice Lelio) „ due leggi nella natura; la prima, che forza non si distrugga, senza produrre effetto di contusione, o altro simile; l'altra, che non si possa avere un movimento novello senza „ causa, che lo determini. La prima legge vuole, che due „ corpi

(a) *l. cit.*

(b) *Dialogo delle forze vive, e dell' azioni delle forze morte*, *Giornata X. pag.* 342., e 343.

„ corpi eguali perfettamente duri, che vanno all' urto con e-
„ guali velocità, con le stesse ritornino indietro. La seconda
„ legge comanda, che essi si fermino. Queste due cose insie-
„ me non sono combinabili; dunque, se fossero possibili i
„ corpi perfettamente duri, l' una, o l' altra delle leggi della
„ natura verrebbe meno, e per conseguenza essi non sono
„ possibili „. Al che rispondo, che in quanto alla prima
legge, ella non può aver quella generalità, che le vien re-
galata; imperciocchè è noto in meccanica, e si dimostrerà
nel secondo Tomo di quest' Opera, che un corpo mosso da
due forze cospiranti, cioè agenti per direzioni, che fanno
angolo, è costretto a passare per la diagonale d' un paralle-
logrammo, i di cui lati vengono espressi tanto da dette for-
ze, che dalle loro direzioni; nella qual occasione venendo
essa diagonale a denotare la forza, con cui il mobile cam-
mina, vedesi manifestamente, che il corpo non può muoversi
con una forza, che sia la somma delle forze motrici, perche
tal diagonale è minore della somma de' due lati esprimenti
le dette forze, e perciò una parte di forza, e in conseguen-
za una parte di moto deve necessariamente restar distrutta.
Ora i Pianeti nel descrivere le loro Orbite, essendo mossi da
più d' una forza nel tempo istesso (100.), debbono obbliga-
tamente passare per innumerabili diagonali, come pure acca-
de a tutti i projetti; onde rimane in essi incessantemente di-
strutta qualque porzione per piccola che sia di forza im-
pressa in loro congiuntamente dall' azione delle forze centri-
peta, e projettizia; ma qui non succede contusione; dunque
tal prima legge non merita, torno a ripetere, il nome di
universale.

Mi

202. Mi sarà opposto, che questa legge riguarda soltanto la percossa. Al che replico, che a volere stabilire per questo verso l'impossibilità de' corpi duri, bisogna dimostrare, che la contusione, o l'ammaccamento de' corpi per urto procede dall'esser la materia sostanzialmente, e non apparentemente cedente, e molle; ma ciò è stato più supposto, che dimostrato, come ho altrove avvertito (85.); dunque il ragionamento contro l'esistenza de' corpi duri è vacillante, e inconcludente; anzi siccome parmi d'avere addotto delle buone ragioni contro questa pretesa mollezza, bisognerà confessare, che la contusione altro non sia, che il disgregamento degli atomi forzati dall'urto ad uscire dal loro posto, e a farsi luogo altrove. Aggiungo, che le dette due leggi non solamente non sono incompatibili con i corpi duri, ma sono conciliabili co' medesimi in occasione di spiegare il fenomeno importantissimo dell'elasticità. Per altro non è questo il luogo a proposito, per parlarne fondatamente. A me basta d'avere al presente richiamato, se pur non m'inganno, i corpi perfettamente duri dall'esilio, a cui alcuni Filosofi con raziocinj forse più ingegnosi, che veri, gli avevano condannati, e d'aver rimesso la materia in possesso dell'impenetrabilità, e dell'estensione, che gli erano state tolte in compensazione della divisibilità, che m'è convenuto involarle.

PROPOSIZIONE XXV.

203. *Venendo gli Atomi ne' varj loro incontri a mescolarsi, si sarebbero mantenuti sempre slegati.*

Non potendovi essere alcuna forza corporea esteriore (131.), che li forzasse a stare insieme attaccati, ed essi essendo di

lor

lor natura inflessibili, e durissimi (128.), e tutti d'un estrema piccolezza (come dimostra la successiva divisione de' corpi), non v'è ragione alcuna favorevole, per cui dovessero rimanere insieme connessi, e per così dire abbracciati. Dovevano dunque restar sempre slegati; il che &c.

PROPOSIZIONE XXVI.

204. *Gli Atomi stanno insieme attaccati con una manifesta tenacità.*

Quando si vuol dividere qualunque corpo, egli mostra sempre più o meno resistenza a tal divisione con una particolare tenacità, quantunque finalmente dividasi; ma ogni corpo non è altro, che una congerie di atomi insieme confusi, ed ammassati (128.); eglino dunque son quelli, che mostrano tal resistenza alla dissociazione; ma se non vi fosse una forza, che li tenesse collegati, essi rimarrebbero slegati per la Proposizione antecedente, nè darebbero il segno, che danno, di tenacità; dunque debbono necessariamente stare alla vicendevole aderenza con qualche forza; il che &c.

PROPOSIZIONE XXVII.

205. *La forza, che tiene gli Atomi collegati, non può procedere dalla loro configurazione.*

Se ciò fosse, bisognerebbe supporre gli atomi uncinati, o configurati in maniera, che scambievolmente intralciandosi, e avviticchiandosi, si mantenessero fermi al contatto; in tal caso è manifesto, che non vi sarebbe corpo divisibile; ma

 i cor-

i corpi sono successivamente divisibili per esperienza; dunque tal divisione richiederebbe la frattura del supposto intralciamento, e in conseguenza degli atomi, i quali perciò sarebbero divisibili, e frangibili contra ciò, che si è stabilito (128.); non può dunque la configurazione degli atomi esser causa efficiente della loro collegazione (204.); il che &c..

COROLLARIO.

206. Non si può dunque fare a meno di non supporre gli atomi di mole per ogni verso estremamente circoscritta, voglio dire di figura sferica, ovale, cubica, cilindrica, retta &c.

SCOLIO.

207. Ho supposto la figura ritorta, e uncinata, come l'unica, che sia atta a ritenere gli atomi al consorzio. In fatti gli Epicurei, e i Gassendisti credevano, che i corpi ripetessero la loro durezza, o sia la tenacità delle loro particelle componenti da tanti piccolissimi uncini, ed ami, co' quali rimanevano reciprocamente collegate, ed intralciate le dette particelle di figura ramosa. Odasi Lucrezio (a):

Denique quæ nobis durata, ac spissa videntur,
Hæc magis hamatis inter sese esse necesse est,
Et quasi ramosis alte compacta teneri,
In quo jam genere in primis adamantina saxa
Prima acie constant ictus contemnere sueta,
Et validi silices, & duri robora ferri.

PRO-

(a) *Lib. II.*

PROPOSIZIONE XXVIII.

208. *La forza, che mantiene gli Atomi scambievolmente aderenti, non può essere esteriore.*

Fuor degli atomi non può esister materia, che gli attorni (131.), e in conseguenza forza, che li predomini con l' impulso, o con la pressione; dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO.

209. Se la forza, che mantiene gli atomi alla vicendevole aderenza, non può essere esteriore, ne viene per necessaria conseguenza, che sia loro propria, agente con essi, ed intrinseca totalmente alla loro massa.

PROPOSIZIONE XXIX.

210. *La forza collegante gli Atomi ad un tenace contatto era assolutamente necessaria per le produzioni dell' Universo.*

Non si possono successivamente eseguire nuove produzioni in natura senza quell' aderenza delle parti, onde la materia risulta (204.), il che è per se manifesto; perche senza una forza motrice, e collegatrice l' opposizione, e l' attacco di parte a parte non si farebbero; ma gli atomi, se rimanevano nel vuoto privi d' una forza collegatrice, sarebbero restati disciolti, ed insociabili (203.), e perciò niuna produzione delle innumerabili, che vannosi incessantemente for-

formando in natura, sarebbe stata possibile; dunque era necessaria, e indispensabile a questo fine una tal forza; il che &c.

Corollario I.

211. Essendo una tal forza necessaria, e indispensabile agli atomi per le successive produzioni, ne segue, che ella dovrà essere inseparabile, indelebile, ed immedesimata, per così dire, alla loro sostanza; sicchè bisognerà confessare che ella sia un carattere della materia impressole da Dio, o nell' atto della Creazione, come l' impenetrabilità, la configurabilità, e l' estensione, ovvero (il che è più probabile) dopo tal creazione, come il moto; e siccome l' origine degli altri caratteri materiali non ha avuto l' essere, che dall' arbitrio di un agente libero, qual è Dio, ne segue, che non si può, nè si deve rispondere altrimenti riguardo a tal forza a chi ne ricercasse il primo principio, appunto come se fosse ricercato il nascimento de' menzionati caratteri, non si può, nè si deve ricorrere ad altra sorgente, che al volere d' un Dio Creatore.

Scolio I.

212. Mi potrebbe forse esser fatta la seguente obbiezione. Potendo esister un corpo senza moto, concludono i Filosofi, che il moto non è essenziale alla materia; onde potendo per i posti principj esistere gli atomi senza la forza d' aderenza, quantunque non idonei alla produzione delle cose, ne verrebbe egualmente, che non fosse nemmen tal for-

forza essenziale alla materia. Al che rispondo, che questo non prova, che la detta forza non esista, come dal non esser il moto essenziale alla materia non si può tirar la conseguenza, che egli non vi sia. Ora a me basta, che la forza in questione esista, qualunque sia l'aspetto, con cui venga riguardata, e però tal obbiezione sarebbe nulla in quanto al mio fine.

COROLLARIO II.

213. Giacche la forza collegante gli atomi è un carattere impresso in loro, almeno come il moto (212.), ne segue, che debba essere universale, cioè che non possa darsi atomo, che ne sia privo, come accade riguardo agli altri caratteri, primarj, o secondarj che siano.

SCOLIO II.

214. Per altre ragioni ancora ripugna, che la forza collegatrice degli atomi non sia per essi universalmente diffusa; imperciocche se Dio avesse creato degli atomi senza tal forza, vi sarebbero nella materia delle porzioni inette alla produzione successiva delle cose (210.); in conseguenza vi sarebbe della materia oziosa, e però Dio avrebbe creato delle cose inutili, il che è assurdo (63.). Dall'osservarsi poi, che un mucchio d'arena si mantiene slegato, da un sasso, da un metallo, che spezzati, o in qualunque modo divisi, non si riuniscono come prima, con tutte le diligenze di rimettere le rotture al contatto, non si deve inferire un'ec-

un' eccezione alla regola generale; ma vedrassene la ragione a suo luogo, cioè nel terzo Tomo di quest' Opera.

COROLLARIO III.

215. Dall' universalità di questa forza (213.214.) deducesi per necessaria conseguenza, che ella esser debba reciproca; imperciocchè se nel corpo A è stata impressa una forza per unirsi all' aderenza con qualunque altro corpo, si dovrà unire anche al corpo B; viceversa se il corpo B possiede una forza d' unirsi all' aderenza con qualunque altro corpo, deve farlo necessariamente anche con il corpo A; e però tal forza fra due corpi dev' esser reciproca; sicche tutta la materia è sottoposta inviolabilmente a questa legge, quando sia posta nelle debite circostanze.

PROPOSIZIONE XXX.

216. *Le forze, che mantengono gli Atomi alla vicendevole congiunzione, sono di diverso calibro.*

Gli atomi formano tante classi di qualità diverse (143. 144.); dunque v' è più ragione favorevole, che forze diverse accompagnino sostanze differenti, che viceversa. Ma tal diversità vien confermata dall' esperienza nella varia tenacità de' corpi, la quale proviene da una forza inerente alla lor massa (209.); resta dunque provata la Proposizione.

Co-

Corollario.

217. E' chiaro, che tutti gli omogenei si accoppieranno, o si stringeranno insieme con una forza costante, o sia con la medesima forza; ma la classe omogenea A riterrà fra' suoi atomi una forza di tenacità differente da quella, che esercita tra' suoi la classe B, e così dell' altre. Similmente un atomo della classe A con un atomo della clase B non solo eserciterà una forza d' aderenza diversa da quella, che esercitava con un suo compagno, o sia con un altro omogeneo, ma diversificherà da amendue i detti casi per ciò, che risguarda l' attacco con un atomo della clase C; e così in seguito.

PROPOSIZIONE XXXI.

218. *La forza di reciproca aderenza negli Atomi non solo agisce al contatto, ma a qualche distanza ancora.*

Molti fatti provano questa verità. Un fascetto di raggj, che passi vicino ad un corpo, s' inflette verso di quello talmente, che rimangono più piegati i raggj più prossimi. La calamita, ed il ferro operanti anche nel vuoto artificiale la mostrano ad evidenza. Si getti una porzione di mercurio corrente nel fondo sufficientemente ampio di un vaso, che contenga qualche quantità d' acqua, poi si agitino i due fluidi con legno, o con altro arnese in maniera, che la masa mercuriale resti nel fondo del vaso sparpagliata in porzioni; osservisi poscia, lasciato il tutto in quiete,

te, e vedrassi, che alcune porzioni mercuriali bastantemente prossime, scacciata dopo qualche tempo l'acqua intermedia, correranno impetuosamente a vicenda ad unirsi: segno evidente, che in quiete tendevano ad avvicinarsi; perche se ciò non fosse, non avrebbero potuto scacciare l'acqua frappolta. Se si pone un corpo convesso sulla superficie dell'acqua, lanciasi ella subitamente dopo il contatto ad inondarlo tutt'all'intorno, alzandosi sopra il proprio livello, e così innalzata a dispetto dell'Idrostatica sostenendosi. Se si espone un ampio foglio di carta, o una pezzuola asciutta, o umida in qualche distanza da un carbone fumante, il fumo, ogni volta che l'una, o l'altra se li presenti, va dopo un poco di tempo piegandosi verso di esse, e finalmente si diffonde per la loro superficie; quali tolte dalla sua vicinanza, egli torna subito al suo posto, come ho mille volte osservato. Il segno però più evidente ci vien somministrato dalla gravità, la quale agisce ad enormi distanze per procurare la reciproca aderenza delle parti materiali. Tralascio altri fatti, che concordano cogli esposti a rendere evidente la Proposizione.

PROPOSIZIONE XXXII.

219. *La forza reciproca d'aderenza negli Atomi, che agisce anche in distanza, era assolutamente necessaria per la conservazione delle produzioni, e per l'effettuazione de' fenomeni, che in natura si osservano.*

Se tal forza non agisse in distanza, i projetti alla superficie terrestre, e i corpi celesti non potrebbero descrivere i lo-

i loro viaggj curvilinei; in ſomma non ſi darebbero moti in natura ſe non rettilinei. La noſtra Terra adunque ſi troverebbe in tal diſtanza dal Sole, che ſarebbero gia da gran tempo diſtrutte le ſue produzioni. Il che eſſendo per ſe manifeſto, non ſi può dubitare, che manifeſto non ſia ancora l' aſſunto.

S C O L I O.

220. Per eſſer tanto tra' Filoſofi contraſtata l' origine di queſta forza operante sì al contatto, che in diſtanza, e pretendendo molti di eſſi, che da un ambiente d'una particolare attività i di lei effetti provengano; quantunque ſiaſi direttamente dimoſtrato, ſe non erro, il contrario, parmi per ulterior conferma indiſpenſabile il metter in viſta le incongruenze, e le aſſurdità, che naſcerebbero dal ſupporre queſt' Oceano arbitrario, faſciante non ſolo la materia tutta, ma trapaſſante attraverſo la medeſima, inſinuanteſi imperioſamente per tutte le di lei poroſità, ed eſercitante ſovr' eſſa quel dominio tirannico, che i ſuoi Inventori le vanno gratuitamente regalando. Mi ſia per altro conceſſo, che io ſupponga note in queſt' occaſione alcune dottrine, che dalle precedenti dimoſtrazioni non derivano.

CAPITOLO SETTIMO.

Degl' inconvenienti, che provengono dal sistema d' un fluido universale non solo fasciante, ma penetrante per li pori i corpi tutti, e formante col suo rapido movimento, o con la pressione, o con la forza elastica i fenomeni della gravitazione, e dell' aderenza de i detti corpi.

****
*****

PROPOSIZIONE XXXIII.

221. È *Insostenibile l' ipotesi d' un fluido gravifico, che in qualunque modo muovendosi produca il fenomeno della Gravità.*

Se si suppone muoversi in linea retta, bosognerà farlo necessariamente passare per il centro della Terra, e allora da una parte i corpi anderebbero dalla periferia verso il centro, dall' altra si muoverebbero dal centro alla periferia; il che è contrario all' esperienza. Se si supponesse, che tal materia gravifica si precipitasse da ogni parte per linee rette

rette convergenti al centro Terrestre, giunta che vi fosse, o dovrebbe annichilarsi, il che è assurdo, o dovrebbero dall' incessante incursione reciproca continuamente turbarsi i suoi movimenti per elastica, o inelastica, che concepiscasi; onde anche la legge de' gravi cadenti si verrebbe continuamente a turbare; il che pure è smentito dall' esperienza. Se si suppone muoversi circolarmente, è noto, che non ad un sol centro comune dovrebbero i corpi radunarsi, ma a' centri respettivi di tutti i cerchj paralleli, che il fluido formerebbe nel rotarsi, di qualunque figura suppongasi il suo volume; ondè la Terra sarebbe di figura cilindrica, o prossimamente tale, il che pure è contrario all' osservazione. Se tal materia formasse nel girare tanti circoli eguali, e concentrici intersecantisi vicendevolmente in due punti opposti a guisa di due Poli, il reciproco incontro ne turberebbe subito la regolarità, e tutto anderebbe ben presto in disordine; onde i corpi da tal fluido sospinti in vece di precipitare ad un centro comune, anderebbero a posarsi in più luoghi, se pure il torrente, da cui venissero guidati, continuamente ripercosso permettesse loro la quiete. Non essendovi dunque altro caso più favorevole degli addotti a tale ipotesi, resta provata la Proposizione.

S C O L I O.

222. L' ingegnosissimo Des-Cartes inventò i Vortici a fine di spiegare la Gravità, non pigliandosi pensiero d' esaminare la sua Ipotesi, se compatibile, o no, fosse con la natura; ma tal Romanzesca opinione è oggimai totalmente in-

insostenibile con tutti gli sforzi d' ingegno i più ostinati de' più industriosi seguaci di detto celebre Autore, i quali per quanto abbia preteso di pertinacemente difenderli per un puro spirito, cred' io, di partito, pure veggono la loro causa affatto perduta, quantunque ne scappi fuora di quando in quando qualcheduno a girare a tondo con essi. Il famoso Giovanni Bernoulli ne confessa ingenuamente l' insussistenza. „ Si è conosciuto, (egli dice) (a), da molto tempo, che „ nell' idea, che dà Des-Cartes per ispiegare coll' azione „ de' suoi Vortici la causa della gravità, i corpi gravi non „ dovrebbero tender direttamente al centro, ma perpendicolar- „ mente all' asse di questi Vortici; l' esperienze fatte in se- „ guito hanno confermato questa obbjezione, essendosi vedu- „ to, che una sfera di vetro piena d' acqua fino a una par- „ te, che conteneva dell' aria, o una materia liquida di mi- „ nor densità dell' acqua, essendo rotata rapidamente intor- „ no al suo asse, quest' aria, o questa materia meno den- „ sa si adunava, non gia intorno al centro in figura di glo- „ bo, ma più tosto lungo l' asse, e formava un noccjuo- „ lo allungato, avvicinantesi alla figura cilindrica, relati- „ vamente alla natura delle forze centrifughe, la qual vuo- „ le, che le parti, che ne hanno meno, come sono le „ meno dense, cedano alle più dense, che hanno maggior „ forza centrifuga, e tendono per conseguenza verso il „ centro del cerchio parallelo all' equatore della sfera, va- „ le a dire, perpendicolarmente al suo asse. Leggasi sovra „ di ciò il discorso di M. Bulffinger „. Tentò M. Bulffinger di riparare a quest' inconveniente, ma come dice il me-

(a) Joh. Bernoulli *Operum T.* 3. | *N.* 146. §. 9. *pag.* 272.

medesimo Bernoulli [a], lo fece con maniera più ingegnosa, che verisimile. Tutto ciò si può vedere esattamente disteso nella *Fisica sperimentale* dell' Abate Nollet, *Tom. II. Sezione II. Lez. V. delle forze centrali*, *Esperienza IV. con quel*, *che segue*, dove conoscerassi, che l' esperienza ripugna al progetto del detto Bulffingero. Merita ancora, riguardo a' Vortici Cartesiani, e Malebranchisti, di esser letta la *Replica* di M. Sigorgne a M. de Molieres, o sia *Dimostrazione Fisico-Matematica sull' impossibilità*, *ed insussistenza de' Vortici*. M. de Voltaire porta undici dimostrazioni contro la Romanzesca esistenza di questi Vortici [b]; e il celebre P. Jacquier ne dimostra ancor esso [c] elegantemente al suo solito l' incongruenza.

PROPOSIZIONE XXXIV.

223. *E' insostenibile il preteso assioma; che un moto, o una tendenza al moto supponga necessariamente un altro moto impellente.*

Imperciocche se un moto deve indispensabilmente esser prodotto da un altro movente, domanderò, chi farà agire questo secondo, e così sempre. Non vi sarà dunque un limite in tal soluzione, vale a dire, sarà infinita la serie delle cause producenti un effetto; il che è inconveniente (57.); onde è fuor di dubbio la Proposizione.

Co-

(a) *L. cit.* §. 7. *pag.* 269.

(b) *Oeuvres de M. de* Voltaire *T. 6. Part. III. Chap. II. pag.* 177. *seq. Edit. de Dresde a.* 1748.

(c) *Instit. Philos. T.* 3. *Par. I. Sect. I. pag.* 131., *e seg.*

COROLLARIO I.

224. Per tal ragione si domanderà, chi muove il fluido gravifico per quel verso, che più piace a' protettori di tal chimera? Se essi risponderanno, un altro fluido, faremo da capo, e così in infinito; vi vorrebbero dunque infiniti fluidi comunicantisi il moto, il che è assurdo.

COROLLARIO II.

225. Bisognerebbe dunque arrestarsi a un primo mobile, il quale dipendesse immediatamente dalla mano, per così dire, del divino Artefice. Ma se il divino Artefice ne dovesse essere il Motore primario, dovrebbe ancora star continuamente occupato a riparar le perdite di moto procedenti dal reciproco soffregamento della materia, il che denoterebbe imperfezione nella macchina. E' più conforme adunque a' divini attributi l'aver dato Dio alla materia una forza intrinseca, ed inerente, come si è dimostrato nel precedente Capitolo, che l'addossargli l' inconveniente d'aver fatto una creatura imperfetta, o pure (il che torna il medesimo) l'aver fatto per il *più* ciò, che far poteva per il *meno*.

SCOLIO.

226. Il celebre Ugenio nella sua Dissertazione *de causa Gravitatis* così sul principio si esprime. *Gravitas enim* *cum*

cum sit nisus quidam, inclinatiove ad motum, debet verosimiliter oriri ab aliquo motu. Il Tummiggio similmente nelle sue Istituzioni della tenebrosa Filosofia Wolfiana (a) parla con questa franchezza. *Pendet enim gravitas a materia interlabente; Gravium enim motus constanter acceleratur, & versus centrum Telluris dirigitur, vi observationis. Supponit igitur causam externam.* (§.46. Cosmolog.). *Qui aliter sentiunt, & gravitatem a causa naturali independentem imaginantur, rationem, potentem numinis voluntatem unice allegantes, eam in numerum* qualitatem occultarum *referunt, hoc est, Entium sua natura inexplicabilium, differentiam inter veritatem, & somnium non capientes.* (§.10. Ontol.). Almeno l'Ugenio ha frapposto alla sua asserzione la parola *verosimiliter*, ma il Tummiggio pone la sua opinione per una verità assoluta. Dica per altro quel, che egli vuole, gli converrà sempre, volendo sostenere la sua opinione, ricorrere ad una prima causa, che dia il moto alla sua materia interlabente, o a una serie di tali materie, quando non pretendesse, che la prima si muovesse da se a capriccio, il che sarebbe un' empietà contraria ancora a' suoi stessi principj. Vi sarà dunque più motivo di chiamar visionaria, e sognata la detta sua materia interlabente, e de' suoi seguaci, che *qualità occulta* la forza inerente alla materia per produrre la gravità; tantopiù, che per la medesima ragione l'impenetrabilità, il moto &c. meriterebbero un tal nome, non potendosi allegare altra ragione della loro esistenza, se non la volontà del Creatore, come altrove si disse (111).

PRO-

(a) *Inst. Phil. Nat. Cap. III.* §. 51.

PROPOSIZIONE XXXV.

227. *Non può ammetterſi un fluido gravifico rotanteſi intorno al centro terreſtre, ſenza ſupporre tacitamente, che egli vi graviti, cioè ſenza ſupporre ciò, che è in queſtione.*

Non potendo un corpo meſſo in moto da un ſolo agente ſcorrere una traccia curvilinea (100.), converrà neceſſariamente ſupporre intorno di eſſo più forze motrici; o che Dio ſia continuamente occupato in applicarvi nuove forze, per mutarne ogni momento le direzioni. Se il ſecondo; ne ſuccederebbero gli altrove accennati inconvenienti (225.), che è inutile il replicare. Se il primo; giacche deveſi preſceglier ſempre la maggior ſemplicità (63.), conſideriamo due ſoli agenti, cioè una forza, da cui il corpo viene ſpinto per la tangente, ed un' altra, da cui egli è determinato verſo il punto fiſſo. E' noto per la dottrina de' moti compoſti, e delle forze centrali, che egli debba in tal contraſto prendere la ſtrada di mezzo per tante inſenſibili diagonali, e girar continuamente attorno al detto punto fiſſo, variando la curvità al variar del rapporto di dette due forze, e deſcrivendo l' aree proporzionali a' tempi. Non poſſono in altra maniera eſſer conſiderati due agenti per far, che un corpo ſi aggiri intorno a un punto fiſſo. Non potendo dunque il noſtro fluido in queſtione eſcir di queſti limiti nel rotarſi intorno al centro terreſtre, ne ſegue neceſſariamente, che anch' egli dovrebbe per un verſo eſſer vibrato per una linea retta, e per un altro tendere al detto centro; ſicche eſſo pure quivi di ſua natura gra-

graviterebbe, anzi tutto vi ruinerebbe di fatto, supposto; che il moto impulsivo venisse a cessare; come viceversa tolta questa tendenza, tutto si dissiperebbe, fuggendo per la tangente. Con che dimostrasi, che quei medesimi, che non ammettono gravità ne'corpi, se non per la circolazione d'un fluido a lor capriccio, nel dare a questo fluido l'esecuzione di far gravitare i corpi, non possono dispensarsi dal supporre tacitamente anch' esso gravitante, vale a dire dal supporre ciò, che è in questione; il che &c.

S c o l i o.

228. La medesima tacita supposizione fece nel luogo citato l'Ugenio, allorquando rotato il fluido d'un cilindro, pretese, che da tal rotazione soltanto, e non da altra causa, la cera di Spagna dispersa per il fluido fosse portata al centro della base, su cui il detto cilindro posava; ma se non vi fosse stata la gravità, la detta cera in vece di raccogliersi al centro di detta base, sarebbe restata immobile in quella situazione, in cui al termine del moto rotatorio si fosse ritrovata, vale a dire sarebbe rimasta diffusa nella cavità del cilindro senza discendere; ammessa poi la gravità col lasciare in quiete il cilindro, in cui l'acqua rotavasi, la detta cera, la quale per l'impeto giratorio impressole dall'umore non ubbidiva ad essa gravità, diminuito tal impeto nell'umore per la quiete, e per il soffregamento delle pareti del vaso, cominciò a secondarne la forza, che se le faceva momentaneamente superiore. Doveva dunque ubbidire nel medesimo tempo 1.) al moto impressole dal fluido, che seguitava

stava più lentamente a menarla in giro. 2.) all'altro moto de' circoli aquei, che ripercossi dalla parete cilindrica dovevano retrocedere verso l'asse del medesimo vaso, diminuendosi continuamente per il soffregamento laterale. 3.) alla gravità, che la forzava sempre più alla discesa; sicche gli era necessario il pigliare una strada di mezzo, girando a un tempo, e precipitando, e passare in conseguenza per una spirale continuamente convergente verso l'asse del detto moto, e nella totale estinzione coincidente con la di lui estremità, cioè col centro della base.

PROPOSIZIONE XXXVI.

229. *Il fluido gravifico non può produrre il fenomeno della gravità, nemmeno quando si voglia, che a tal fine agisca per sola pressione.*

In tal caso questo fluido agirebbe in ragione delle superficie esteriori; onde è evidente, che que' corpi, che avessero maggior superficie, sarebbero più sospinti al basso, il che è falso per l'esperienza. Ma si pretende, che egli per l'enorme sua sottigliezza s'insinui dentro le porosità de' corpi, e ne inondi per ogni verso i componenti, dicendosi dagli antagonisti, che ogni corpo ha la sua materia propria, ed una straniera, che ne penetra li pori, circolandovi liberamente. Supposto dunque corporeo un tal fluido, e concessa una tal penetrazione, ne segue, che egli non potrà contuttociò intromettersi fra i contatti esattissimi, co' quali le particelle elementari formanti un corpo stanno al reciproco immediato combaciamento; imperciocche per piccoli, che concepiscansi tali com-

combaciamenti, son sempre quanti, in conseguenza analoghi ad una perfetta solidità, e però al decantato fluido totalmente impervj; altrimenti la materia sarebbe penetrabile, contra ciò, che si è dimostrato (81.). Converrà dunque dalla pressione al detto fluido accordata desalcare tali contatti. Ma l'estensione di tali contatti per quanto in due elementari particelle, o molecole sia piccola, pure risguardo a un numero esorbitante di esse dev'esser notabile. Dunque quanto più un corpo avrà raccolti all'immediato contatto i suoi componenti, meno verrà compresso, e perciò meno dovrà pesare, e viceversa; sicche un pezzo d'oro ex. gr. quanto più sarà infranto, e spicinato, dovrà più pesare, che quando era massiccio. Per la medesima ragione due fluidi, che uniti insieme riducansi in un volume di minor somma de' due volumi separati, dovrebbero per quest'ipotesi pesar meno, che quando eran divisi; il che pure è contrario all'osservazione.

Ma quando anche le particelle conformatrici de' corpi fossero tutte tante sferette eguali, e che il detto fluido comprimente le facesse scendere equiveloci, bisognerebbe, che questo avesse una specie d'intelligenza per seguitar da per tutto la Terra, e ciò sempre in una tal positura, che le convergenze delle sue pressioni andassero da ogni parte dirette al di lei centro, altrimenti resterebbero turbate, o annichilate le leggi della gravitazione.

In somma o questo fluido comprimente suppone un altro fluido compresivo, e così in seguito all'infinito; o gli è ingenita una tal forza compressiva; o Dio è continuamente occupato in comprimerlo. Se il primo: ne verrebbe un inconveniente (57.) Se il secondo: si verrebbe ad attribuire a tal

fluido una femovenza afsoluta, il che è un' empietà; ovvero fi fupporrebbe ciò, che è in queftione, facendo grave ciò, che deve produrre la gravità (227.), con che fi fupporrebbe tacitamente ciò, che negafi apertamente. Se il terzo: fi farebbe imperfetta l'opera del fommo Creatore, o fe gli farebbe far per il più ciò, che far poteva per il meno, il che è afsurdo (61.); refta dunque dimoftrato l'afsunto.

PROPOSIZIONE XXXVII.

230. *Se foffe vero il fluido gravifico, o circolante, o circomprimente, dovrebb' effer coftante in qualunque luogo della Terra, determinandovi invariabilmente a un punto fiffo tutti i corpi fenz' eccezione.*

Quefto fluido fi fuppone da' fuoi Creatori così fottile, che poffa intruderfi fenz' oftacolo in ogni corpo, e per fervirmi della frafe del Tummiggio [a], paffare anche per li pori dell' oro, come l'acqua per una rete: Ma i celebri Geometri Francefi hanno offervato al Perù, che il Pendolo in faccia al monte Cimborafo non fermavafi perpendicolare alla fuperficie della Terra, ma rimaneva in fito alquanto obliquo verfo quella fmifurata Motagna, formando coftantemente colla perpendicolare all' orizzonte un angolo di fette, o otto feconde. Ecco per conferma le parole ifteffe di M. de Maupertuis [b]. M. Bouguer & de la Condamine envoyés par le „ Roy au Pérou, ont trouvé qu' une très-groffe Montagne „ appellée Chimboraço, fituée fort près de l' Equateur, atti„ roit

(a) *Inftit. Philof. Nat. Cap. III. §. 55.*

(b) *Difcours fur les differentes figures des Aftres.*

„ roit à elle le plomb qui pend au fil des Quart-de Cercles.
„ Et par plusieurs observations des hauteurs des Etoiles pri-
„ ses au *Nord* & au *Sud* de la Montagne, ils ont trouvé
„ que cette attraction écartoit le fil à plomb de la Vertica-
„ le d'un angle de 7″ ou 8″. Or siccome tal monte non poteva essere al detto fluido gravifico di remora, e non essendovi ragion sufficiente, per cui tal aberrazione del pendolo dovesse senza causa farsi più in un luogo, che in un altro (53.), bisogna concludere, che questo fluido non avrebbe, come pretendono, legge costante, e non avendola, deve passar per supposto, ed erroneo, ed esser perciò rigettabile, come quello, che non è valevole a spiegare i fenomeni.

In oltre se l'operazione d'esso fluido fosse costante, una goccia d'acqua, o d'olio, o di spirito di Nitro &c. posta tra due lastre di vetro ben levigate, inclinate all'orizzonte, e che dalla parte più bassa siano un poco aperte, mentre dalla più alta fanno angolo, non salirebbe con moto accelerato (al contrario di tutti i corpi liberi) allorche trova un'angustia bastante. Ciò dimostra la famosa Esperienza dell'Haukbee [a] replicata col medesimo successo da' Fisici più celebri. Nè questa salita debbesi attribuire alle varie concorrenti circostanze, 1.) perche succede egualmente nel vuoto; 2.) perche se l'apertura delle dette lamine vitree sia un poco meno angusta, che non è quando la goccia sale, la goccia allora si arresta, e se cresce un poco più, la goccia discende.

Bastano questi due esempj senz'addurne altri, per togliere non solo l'universalità all'ipotesi del fluido gravifico, e dimostrarne con ciò l'insufficienza; quanto ancora per far vedere,

(a) *Esperienze Fisicomeccaniche tradotte a Firenze nel* 1716. *Sezione V.*

dere, come nel caso secondo, che detto fluido produrrebbe due moti totalmente opposti, ed in conseguenza agirebbe contra se stesso; il che è anche peggio; è dunque evidente la Proposizione.

PROPOSIZIONE XXXVIII.

231. *Un fluido girante, o premente non può esser causa sufficiente della varia durezza de' corpi.*

Se si supponesse gira nte, sarebbe di necessità l'ammettere innumerabili Vortici, giacche in ogni luogo, e tempo, e per ogni verso si fanno le aderenze de' corpi. Questi Vortici adunque debbono necessaria mente intersecarsi, ed intralciarsi, a voler, che in ogni luogo possibile segua tal coesione; onde se son materia, e se agiscono sulla materia, debbono essere anch' essi inevitabilmente sottoposti alle leggi universali dell'impulso, e in conseguenza è impossibile, che i loro moti non debbano interrompersi, e scompigliarsi: con che i fenomeni delle particolari aderenze de' corpi dovrebbero anch' essi apparire ne' medesimi soggetti, e nelle medesime circostanze variabili; ex. gr. il volume dell'istessa pietra, o dell' istesso metallo verrebbe a possedere or maggiore, or minore tenacità di parti, trasportato da luogo a luogo; e in conseguenza diversa si troverebbe assai spesso la sua gravità specifica, a proporzione, che il vortice, in cui s'abbattesse, più o meno ne serrasse insieme le parti. Aggiungasi, che nello scompiglio de' Vortici si dovrebbe vedere scompigliarsi ancor la figura de' corpi, e ciò molto frequentemente, mutati che questi fossero di situazione; il che è onninamente opposto all' e-

spe-

ſperienza. Ma quando ſi voleſſe, che la famiglia vorticoſa non reſtaſſe turbata dalla detta incurſione, ne ſeguirebbe, che tutti i corpi ſarebbero da eſſa ridotti ad una figura conſimile, dovendo i loro componenti nella rotazione andare a ſituarſi intorno all' aſſe del moto, e pigliare, come altrove ſi diſſe (222.), una figura proſſima alla cilindrica; il che pure è ocularmente falſo.

Nella ſuppoſizione poi del fluido premente, facendoſi, come ſi è detto, la coeſione de' corpi in ogni luogo, e tempo per qualunque direzione, ed anche per direzioni oppoſte riſguardanti innumerabili punti diverſi, biſognerebbe ſupporre, che foſſero ſparſe da per tutto porzioni di queſto fluido, le quali ſtringeſſero i componenti corporei per ogni verſo; ma queſte porzioni non potrebbero nondimeno eſeguire tutte le coerenze, ſe i corpi, che debbono eſſere indurati, e agglutinati da loro, non incaſſaſſero per l'appunto dentro il loro ambito, altrimenti eſſe ſarebbero ſuſcettibili di azioni contrarie nel tempo iſteſſo, il che ripugna. Ma ſe v' abbiſognaſſe una tal congruenza, vi ſarebbero de' luoghi, ove la coeſione ſi disfarebbe ſpeſſo ſpontaneamente, cioè ſenza cauſa apparente; imperciocchè ponendo più quà, o più là un corpo, dovrebbe queſti dividerſi in due nel paſſare ſopra i confini di due volumi contigui di tal fluido, giacchè ognuno agiſce con direzione oppoſta all' altro; il che ancora è falſiſſimo.

In oltre ſe il fluido comprimente foſſe d' una ſola natura, tutte le aderenze, e in conſeguenza tutte le durezze de' corpi ſarebbero eguali, o quaſi eguali; altra manifeſta falſità. Converrebbe dunque ammettere, o diverſi fluidi compreſſivi dotati di varia forza, ognuno de' quali pigliaſſe di mira, e ſce-

sceglieſſe coſtantemente la ſua qualità di materia, per renderla coeſa fino ad un certo ſegno, e non più, dimodoche due, o più fluidi s'accordaſſero a mettere in comune ognuno la ſua, per farne all'occorrenza un miſto d'una durezza terza, o neutra; ovvero un ſol fluido che aveſſe la proprietà di gettarſi addoſſo a tutti i corpi, per indurirli più, o meno, con l'avvedutezza però di dare la medeſima durezza a'corpi della medeſima ſpecie, dimodoche ſe da qualche forza eſteriore alcuni rimaneſſero diviſi, o infranti, in alcuni caſi egli foſſe ſollecito a riunirli, ed in alcuni altri non ſi pigliaſſe penſiero di ridurli alla primiera aderenza; il che ſarebbe il medeſimo che dare a queſto fluido in ambi i caſi eſaminati un'intelligenza, ed una facoltà d'agire a capriccio: aſſurdo inſoffribile. Peggio poi, ſe ſi pretendeſſe, che Dio ſia occupato continuamente da per tutto a dare a queſte porzioni la dovuta forza compreſſiva, variandone l'energia ſecondo il biſogno, o la legge prefiſſaſi; è dunque manifeſto l'aſſunto.

PROPOSIZIONE XXXIX.

232. *Suppoſto il fluido in queſtione dotato d'elaſticità, e di varia denſità, è inſoſtenibile, che poſſa produrre gravità, e aderenza ne'corpi.*

Se la refrazione della luce naſceſſe dalla denſità di queſto fluido diverſa in luoghi diverſi, come è inclinato a credere il Cav. Newton [a]; o queſta denſità ſi mantiene ſempre l'iſteſſa a'ſuoi luoghi, o va vagando a piacere. Se il primo: tutte

(a) *Optic. Part. III. Queſt. XIX.*

tutte le refrazioni dovrebbero in quel tal luogo esser sempre l'istesse, qualunque corpo d'egual volume vi fosse collocato; il che è contrario al fatto. Se il secondo: non succederebbero le refrazioni costanti rispetto al medesimo corpo situato in diversi luoghi, perche si potrebbe incontrare in diverse vaganti densità; il che parimente è falso.

Se questo mezzo, o fluido, o etere (chiamisi come si vuole) supposto di natura rarissima, si volesse, che fosse molto più raro nel Sole, ne' Pianeti, nelle Comete, e nelle Stelle fisse, che a varie distanze dalle loro masse, e che andandosi graduatamente condensando rispingesse con la sua esorbitante elasticità i corpi verso i luoghi, dove è più raro, producendo in tal guisa la gravità, come opina il detto Newton [a], io formo questo raziocinio. Quanto maggiore è l'elasticità, che possiede un corpo, cioè quanto più vigorosa è la restituzione in sito delle sue parti, tanto maggior forza richiedesi per farne la compressione, e perciò tanto maggior resistenza incontra il corpo comprimente nel caricarne la molla. Or al fluido in questione vien data dal suo Autore un' eccedente forza elastica [b]; dunque un Pianeta, che muovesi per esso, deve nel piegarne le parti incontrare una molto notabile resistenza. Nè importa, che il detto fluido suppongasi rarissimo, perche questa resistenza si ripete non dalla massa come tale, ma da un reniso eccessivo alla compressione, qualunque sia la massa urtata. Se dunque è indispensabile una vigorosa resistenza di tal fluido, a quest'ora il sistema Planetario dovrebb' essere dalla Creazione in qua molto alterato, se non totalmente distrutto. Nè a ciò si at-

S tra-

(a) *L. cit. Prop. XXI.* | (b) *L. cit. Quaest. XXII.*

traversa il vedere, che il fluido Elettrico, quantunque dotato di molto vigore, non serve d' ostacolo sensibile ad un corpo, che vi passi per mezzo, perche', tralasciando altre considerazioni, per esser tal fluido un volume sciolto, cioè per mancarli da ogni parte un punto d' appoggio, è chiaro, che non può far resistenza, come resistenza non può fare una molla, o un arco il più robusto, che dalla parte opposta alla compressione non abbiano dove puntarsi.

Ma come sarà spiegata l' azione di questo fluido riguardo a un corpo, che lasciato in libertà cade verso la Terra, o verso un Pianeta sì primario, che secondario? Se un corpo esente da qualunque forza di gravità, o di tendenza, suppongasi posto dentro ad un fluido elastico, che lo sospinga ad un punto fisso, ogni Pianeta dovrà essere attorniato da un volume d' etere dotato di densità graduate, che si adattino alla sua massa; ma ogni Pianeta sì primario, che secondario, muovesi continuamente in grandi orbite Ellittiche; dunque un tal fluido per produrre la solita gravità, dovrà seguitare anch' esso il viaggio del suo Pianeta; altrimenti i medesimi corpi di questo potrebbero esser suscettibili di gravitazioni, che possedessero alla medesima distanza sollecitazioni diverse alla discesa. Ma qual causa renderà quel fluido così pedissequo de' Pianeti? Se un altro fluido, saremo sempre da capo; dunque non v' è altro rifugio, che o il darli cognizione, o il tenere il Creatore incessantemente occupato a tal effetto. Amendue asurdi. Dubito poi, che le Comete traversando nel loro passaggio questi volumi d' etere, e portando seco anch' esse il loro immenso volume, dovrebbero con tanti cangiamenti indotti

nella

nella regolar denſità di queſt'etere aver apportato a queſt' ora una notabile alterazione nel Siſtema, con averne turbate, e ſcompigliate le regolari gravitazioni; il che è contrario a ciò, che fin adeſſo è ſtato oſſervato.

In oltre ſiccome la gravità, e le forze di coerenza ſeguono leggi, ed intenſità diverſe, come dimoſtrerò a ſuo luogo, e ſiccome le coerenze fannoſi per tutte le direzioni anche diametralmente oppoſte, biſognerà ammettere da per tutto varie radunate d'etere diverſamente denſo, ed elaſtico, acciò poſſano produrre effetti diverſi, come ſono le varie durezze, e le differenti tenacità de' corpi. Ma un iſteſſo corpo traſportato in più luoghi mantiene inalterabile la ſua nativa durezza, e tenacità, il che fanno pure diverſi corpi traſportati in un medeſimo luogo; dunque un tal fluido non è atto a produrre per mezzo della ſua varia denſità, ed elaſticità il fenomeno della coerenza, ſe non ſi voleſſe, che ogni volume del medeſimo ſi gettaſſe addoſſo al ſuo corpo appropriato, per ridurlo alla ſua ſtabilita durezza, il che è un inconveniente anche nella prova dell'anterior Propoſizione rigettato.

Che ſe il Cav. Newton pretendeſſe, che tal virtù del ſuo etere procedeſſe, come nel fluido Elettrico, da un'eſploſione, o che egli agiſſe per vibrazioni, o per un principio attivo qualunque, domanderò donde naſca in queſt' etere un tal principio attuoſo? Se da un altro principio attuoſo, ſaremo nuovamente da capo. Se ſi vuole, che Dio glie l'abbia infuſo nell'atto della Creazione (giacche ripugna che eſſo etere l'abbia libero per natura); ſiccome tanto l'etere, quanto i corpi ſono materia, ſaranno ſuſcettibili degl'iſteſſi

S 2 ca-

caratteri, come in fatti i corpi tutti, o posseggono attualmente, o sono nel caso di possedere l'elasticità, che l'etere possiede; onde non v'è implicanza a dire, che Dio poteva senza ricorrere a quest'etere, dare a' corpi tutti addirittura un tal principio di semovenza. Dal che deducesi, che col supporre, che Dio l'abbia dato ad un tal etere, acciò sospinga a più punti fissi i corpi dell'Universo, se gl'imputerebbe un'imperfezione (61.). Tanti inconvenienti adunque bastano per dare alla Proposizione la dovuta evidenza.

S c o l i o.

233. L'amor de' Sistemi, che tiranneggia tuttavia le menti de' Filosofi, quantunque assai meno de' tempi andati, fa sì, che Uomini per altro dottissimi abbiano ammesso addirittura questo fluido gravifico, o sia etere, o materia sottile, senza esaminarne la natura, e con ciò la convenienza, o l'inconvenienza per la spiegazione della gravità, e della coerenza. Essi hanno fissato per tesi infallibile, che queste proprietà della materia provengano da un principio meccanico, onde senz'ascoltare altre ragioni, vanno a tentone cercando qual sia la natura d'un fluido, che le produca, tenendo per un'altra verità innegabile, che questo fluido vi sia. Ma ciò è un voler forzar la natura, e non un seguitarla ne' suoi andamenti. Io non gli nego di fissare la prima tesi, ma unicamente per esaminarla; gli nego il fissarla per infallibile, quando non ne hanno potuto trovare probabilità alcuna, che escluda gl'inconvenienti. Peggio poi si è l'attaccare l'altrui opinione sostenente, esser la gravità

un

un carattere impresso da Dio nella materia, e ciò con declamazioni ridicole più tosto, che con ragioni dimostrative, quando in qualunque maniera vogliano essi supporre la lor materia sottile, bisogna, che accordino, un primo Motore di essa; sicche eglino pure son forzati di venire lor mal grado al miracolo, che rinfacciano agli altri (a). In oltre se coloro, che pretendono, che la gravità non provenga da pressione esteriore, parlano erroneamente di questo pretesso carattere della materia, ciò non giustifica gli Antagonisti a ripudiare tale opinione, potendo esser verissima una cosa, benche sia mal provata. *Est interdum* (dice Cicerone) *ita perspicua veritas, ut eam infirmare nulla res possit, tamen est adhibenda interdum vis veritati, ut eruatur* (b). Dovrebbero dunque più tosto esaminare spassionatamente, e rigorosamente la questione, e non ricavar la conseguenza dall' uso erroneo, che i difensori della nostra opinione fanno alle volte del raziocinio.

234. Quelli poi, che si sono dati un pò di pena d' esaminare tal etere, ne hanno alla fine confessato l' insussistenza. Ma ciò, che poteva servire ad alcuni d' un giusto pretesto per il ripudio, gli ha fatti traboccare in una maggiore stravaganza, giacche tutto dovevasi nel senso loro rinuovare, fuorche togliere il detto fluido gia fissato indubitatamente per vero. Eccone un esempio ricavato dall' Istoria dell' Accademia Reale delle Scienze, e belle Lettere di Berlino (c). Dopo d' aver quivi l' eruditissimo Segretario esposta l' opinione del celebre Eulero, cioè che un fluido sottilissimo sia quel-

lo,

(a) Joh. Bernoulli *Opera omnia T.* 3. *N.* 146. *pag.* 308. §. 50.

(b) *Pro Quintio.*

(c) *Ann.* 1745. *pag.* 31.

lo, che produca la gravità, e il peso, così segue a dire;
„ La materia sottile istessa, da cui proviene la gravità, sa-
„ rà ella soggetta all' Ipotesi di M. Euler? Imperciocchè
„ questo fluido, qualunque egli sia, è sempre materiale, e
„ se l' essenza della materia consiste in aver un certo grado
„ di densità, si potrà dir con giustizia, che le particelle di
„ questa materia sottile sono altrettanto dense, quanto le
„ molecole de'corpi. Ma grandi sono gl' inconvenienti, che ri-
„ sultano da questa opinione, perche allora non si può fare a
„ meno di separare le particelle della materia sottile sì lun-
„ gi l' una dall' altra, per produrre un vuoto sufficiente a
„ spiegare il movimento, che non si potrebbe più concepire
„ come una tal materia produca la gravità. Imperciocchè
„ è incontrastabile, che il fluido, che cagiona la gravità,
„ debba essere estremamente compresso; e la maniera d' ac-
„ cordare una tal compressione con particelle dissipate, ed
„ allontanate l' une dall' altre? Queste difficoltà impegnano
„ M. Euler ad adottare un altro sentimento, e a concepire
„ la materia sottile costituente il fluido produttore della gra-
„ vità, come d' una natura tutt' affatto differente dalla ma-
„ teria, di cui i corpi sensibili son composti. Vi saranno
„ dunque due specie di materia, l' una, che fornisce l' appan-
„ naggio a tutti i corpi sensibili, le di cui particelle hanno
„ tutte la medesima densità, che è molto considerabile, e
„ che sorpassa di gran lunga quella dell' oro; l' altra specie
„ di materia sarà quella, di cui questo fluido sottile, che
„ produce la gravità, è composto, e che noi chiamiamo *l' E-
„ tere*„. Cosa dunque sarà mai questa gratuitamente suppo-
sta materia di nuovo getto? Chi ne potrà avere una mini-
ma

ma idea, non che dimostrarne una sola proprietà concepibile, che non coincida con quella della vecchia materia, e che in conseguenza non incorra negli addotti inconvenienti? Tant'è! Abortiscono talvolta anche i grand'ingegni.

235. Il Dott. Cheyne divenne anche egli ciecamente appassionato del fluido Newtoniano. „ Un tal fluido, egli dice [a], „ può esser la causa di tutti gli altri misterj segreti, e impenetrabili della Natura, e la medesima cosa, come effettivamente io lo credo, che il fluido, o spirito elastico infinitamente sottile di Newton; e ciò che egli non ha fatto, io non credo che alcun altro intraprenda a fare; vale a dire di determinarne la natura specifica, ovvero la sua esistenza, o la sua non esistenza. Ma se la sua esistenza non è dimostrabile, ella è almeno estremamente probabile „. Io ammiro da una parte un parlare sì decisivo, dall'altra resto attonito in vedere la sua irrisolutezza, ora predicando questa forza d'unione come annessa alla materia, e come un principio intrinseco, che non riconosce meccanismo; ora come un effetto d'un meccanismo proveniente da un fluido elastico; la seconda sua opinione si è qui trasferita; la prima si può vedere ne'suoi Principj Filosofici di Religione naturale [b].

236. La causa, per cui gli Antagonisti hanno mostrato tanta ostinazione in negare un tal principio intrinseco, può rifondersi nel vecchio assioma, *non datur actio in distans;* ed in fatti siccome si pretende da' Newtoniani, che un corpo tiri a se un altro corpo situato in distanza, ne verrebbe, che il corpo attraente agirebbe dove non è; ma io spero di poter in

(a) *Dict. Univ. de Medec. trad. de l'Angl. de* M. James *T.* 5. *pag.* 1638.

(b) *Capit.* I.

dimostrare a suo luogo che una forza emanante da un corpo non può sempre agire in tal occasione inversamente al quadrato della distanza, che è la legge della gravità; onde non vi resta altro compenso, che il dire, che due corpi, i quali si avvicinano reciprocamente per legge di gravità, si muovano originalmente l'uno verso l'altro con una specie di tendenza quasi spontanea, ed allora ecco sparito l'orribile assioma, perche ogni corpo nel muoversi verso un altro per propria tendenza o inclinazione, agisce sempre nel luogo dove è, e non più dove non è. In questo senso intendo di parlare, quando dico, che una tal forza agisce in distanza. Così può pronunziarsi, che una Bestia agisca nel suo genere in distanza, allorche tende, o muovesi verso un oggetto distante, che appetisce, tantopiù che allora diciamo, che un tal oggetto la tira.

CA-

CAPITOLO OTTAVO

Contenente alcuni Corollarj generali consecutivi allo stabilimento superiormente fatto d'un principio attivo inerente alla materia.

§§§

Corollario I.

237. CHiusa dunque ogni strada alla possibilità d'un fluido agente in qualsivoglia maniera per produrre la gravità, e la coerenza de'corpi, bisogna necessariamente concludere, che, se queste non si possono assolutamente ripetere da cause estrinseche, forza è, che siano interne, ed inerenti a'corpi, e che perciò si debbano riguardare come caratteri impressi da Dio a guisa degli altri nella materia. Il che essendosi ancora direttamente dimostrato in tutto il Capitolo VI., resta tantopiù convalidata tal dimostrazione dall'esclusione totale di tutte l'altre cause assegnabili.

COROLLARIO II.

238. A torto dunque esclamano alcuni, accusando i seguaci del nostro partito d'aver rimesso in campo le cause occulte de' Peripatetici, che nulla spiegano, e con ciò tacciando quest' opinione, come un rifugio d'ignoranza; mentre la forza stabilita, si è dimostrato, essere un carattere necessario alla materia, acciò si mantenga in quell' ordine or successivo, or fisso, in cui Dio l'ha posta, il quale nell' avergliela infusa ha scelto per il detto fine la più corta, e più semplice strada dell' altre. Che se poi cosa sia questo carattere nella sua origine è a noi totalmente inaccessibile, possiamo dire, torno a ripetere, esserci egualmente incomprensibile, cosa siano in origine l' impenetrabilità, la continuità, l' estensione, il moto &c., quali essendo i caratteri primarj improntati da Dio nella materia, ad esso unicamente, e non al nostro corto intelletto, è riserbato il penetrarne l' essenza.

COROLLARIO III.

239. Erra dunque il Des-Cartes, pretendendo (a), che tutta quanta la Fisica possa spiegarsi, e dimostrarsi col solo meccanismo, cioè a forza di Teoremi, e di Problemi puramente meccanici; ed erra pure il Newton, sopponendo, che tutti i fenomeni in natura provenir possano da impulso, ammettendo a tal effetto, come si disse, un mezzo, o un etere

(a) *de Trochlea*.

tere elasticissimo, e rarissimo, produttore di essi, senza pensare in qual modo quest' etere abbia un principio permanente di movimento, e di elasticità.

Corollario IV.

240. Per quanto si dimostrasse, esservi realmente un fluido sottile (ex. gr. la luce) circondante, o inondante i corpi, egli pure sarà materia, e perciò soggetto alle medesime leggi, alle quali questa soccombe, vale a dire, inetto a produrle originalmente, come i fautori del fluido gravifico pretenderebbero.

Corollario V.

241. Non si può far dunque a meno di non riconoscere in natura due cause generali; l' una, che procede dal meccanismo; l' altra, che da esso non proviene nè punto, nè poco.

Corollario VI.

242. Giacche l' effetto del principio attivo risedente nell' intimo della materia si considera come una forza, e che in conseguenza gli effetti da essa prodotti possono essere eguali a quelli d' una forza meccanica, ne segue, che non solamente è possibile, ma succede di fatto in natura, che effetti eguali possono molte volte provenire da cause riguardo alla loro origine non eguali; onde anche per tal ragio-

gione si è pronunziato, che gli effetti sono proporzionali a quelle cause, che agiscono sempre nell' istesso modo (55.).

Corollario VII.

243. Giacche tutta la materia tende alla reciproca unione tanto in distanza, che al contatto (215.218.), se un corpo si muoverà per andarsi ad unire con un altro corpo, ancor questo sarà in grado, essendo in libertà, di muoversi verso di quello. L' istesso dicasi di tre, e di più corpi liberi posti nelle debite circostanze, ognuno de' quali dovrà avere un' instancabil tendenza verso tutti gli altri nel tempo istesso.

Corollario VIII.

244. Che se uno di tali corpi sia ritenuto da una forza superiore a quella di tal tendenza, resterà fisso, ed immobile, mentre gli altri anderanno a congiungersi, o con esso, o tra loro, ma non cesserà mai di ritener sempre la sua tendenza verso ciascuno di essi, per esserli questa intrinseca, ed indelebile. Il medesimo dicasi di due o più corpi, che vengano affatto impediti di potersi scambievolmente avvicinare.

Corollario IX.

245. L' impulso dovrà esser la massima parte delle volte un effetto di questa forza, giacche egli non può esser

la

la cauſa, ma bensì eſsa di lui, come ſi è veduto a lungo nell' antecedente Capitolo. Convien dunque confeſsare, che ella abbia la principale almeno, e quaſi l' intera parte nella produzione de' fenomeni in natura. Di tanta importanza era la di lei fondamental cognizione.

COROLLARIO X.

246. Per quanto reſti un pezzo di materia ſolitario, ed immobile, non rimane perfettamente ozioſo, e ſprovviſto di queſta forza inerente. Non ozioſo; perche eſsendo ogni pezzo di materia un ammucchiamento d' atomi, che vicendevolmente ſi ſtringono all' aderenza, vedeſi chiaramente, eſser egli continuamente occupato a mantenere alla reciproca unione, ed al vicendevole abbracciamento, per così dire, le ſue parti; dal che deduceſi, che la materia è in una continua azione dal di lei interno unicamente proveniente. Non ſprovviſto di detta forza intrinſeca riſpetto a' corpi, che poſsano venire dall' eſteriore, perche appena ſopravviene uno di tali corpi, egli non impedito la manifeſta, e la deve manifeſtare, come il corpo in quiete manifeſta l' attitudine a muoverſi quando è percoſso, perche tanto il moto, che la detta forza, ſi è fiſsato nel ſesto Capitolo, eſsere indelebili dalla materia per volere del Creatore.

Co-

COROLLARIO XI.

247. Non è dunque la materia onninamente passiva, come quella, che agisce indipendentemente da cause fisiche esteriori, quantunque determinatamente, cioè verso di altra materia con leggi fisse, e non altrimenti.

SCOLIO.

248. Non vorrei, che taluno precipitando, come è solito, il giudizio, tirasse dalle cose dette qualche illegittima conseguenza. Io non ho preteso mai d' inferire, che la materia abbia semovenza assoluta, cioè che muovasi a capriccio, come un ente pensante libero, ma bensì obbligatamente, giacche nella supposta sua attuosità resta indispensabilmente determinata. Questa determinazione toglie ogni sospetto di libertà, come è per se manifesto; perche se Dio le ha dato una forza intrinseca, per cui muovasi quasi spontaneamente, glie l' ha data con una legge, e con una restrizione inviolabile, il che non può mai chiamarsi agire ad arbitrio; ed in fatti se ella agisse ad arbitrio, potrebbe un corpo andare, o non andare verso un altro, rimosso ogni ostacolo possibile, e stare, o non stare alla di lui aderenza, secondo che fosse il suo piacimento; ma ciò è assolutamente falso, come ripugnante ad un' invitta esperienza, la quale fa vedere, che un corpo non trasgredisce giammai questa legge, finche qualche impedimento da lui insuperabile non si frappone all' esecuzione. Il dottissimo Donato Rossetti

ſetti chiamò queſta forza addirittura *ſpontanea*, ma può ben giudicarſi, che anche egli lo diceva con la notata reſtrizione. Aggiungo, che non ſarebbe ſe non ſoperchieria l' addoſſarmi una tal opinione, non eſſendo ſtata addoſſata a coloro, i quali hanno finora creduto, che un corpo attraeſſe realmente un altro corpo, e che ſarebbero nel medeſimo caſo, perche a pigliar in cattivo ſenſo una tale azione, vi concorrebbero i medeſimi inconvenienti gia notati nella ſemovenza aſſoluta.

CA-

CAPITOLO NONO,

In cui si espone il metodo per conoscere quando nella spiegazione di un fenomeno ricorrer debbasi al principio attivo risedente nella materia.

:o::o:**:o:**

DEFINIZIONE XLIII.

249. FORZA MECCANICA chiamo quella, che procede da un agente estrinseco materiale, applicata in qualunque modo alla materia.

DEFINIZIONE XLIV.

250. FORZA IMMECCANICA chiamo quella, in cui non può concorrere, e non concorre di fatto forza alcuna meccanica, ma che parte dall' intimo, o sia dalla sostanza della materia.

Sco-

S c o l i o.

251. Per evitare ogni equivoco, ficcome ogni forza meccanica attiva dividefi in *preffione*, e in *percoffa*, così dividerò ogni forza immeccanica in *gravità*, ed *attrazione*; onde

Definizione XLV.

252. Per GRAVITA' intendo quella forza immeccanica (250.), per cui un corpo lafciato in libertà cade da qualunque altezza verfo la fuperficie Terreftre; o per cui qualunque corpo foftenuto sforzafi di vincer l'oftacolo, e di fcender più a baffo, col premerlo continuamente.

Definizione XLVI.

253. Per ATTRAZIONE intendo ogni altra forza immeccanica diverfa dalla gravità (252.), cioè operante non folo per direzioni diverfe da quelle, per le quali muovefi un corpo dalla medefima gravità animato, ma ancora con legge differente.

Corollario.

254. *Attrazione* adunque chiamerafli la forza, con cui la calamita, e il ferro muovonfi reciprocamente all' unione; qual' attrazione può chiamarfi *magnetica*. Attrazione diraffi

parimente la forza, con cui ſtanno le parti di un corpo collegate, quale può chiamarſi d'*aderenza*, e così dell'altre, le quali, come vedraſſi ſono di diverſa intenſità relativamente alla diverſa natura de' corpi.

SCOLIO I.

255. Se mai alcuno doveva promuovere con ogni maggiore impegno l'attrazione, lo dovevano eſſere appunto quelli, che hanno uſato ogn' immaginabile sforzo per diſtruggerla totalmente; io voglio dire il Leibnizio co' ſuoi ſeguaci; imperciocche ſuppoſto, che le loro Monadi ſiano gli elementi de' corpi, dovevano neceſſariamente collocare in eſſe (tralaſciate tante altre proprietà attribuiteli gratuitamente, le quali rendono un tal Siſtema intralciato, confuſo, e affatto inintelligibile, non che veriſimile) una forza, che le manteneſſe aderenti nel vicendevole combaciamento; altrimenti i corpi non avrebbero moſtrato reſiſtenza alcuna al disfacimento, e alla riſoluzione ne' loro primi principj, talmente che anche i più compatti ci ſarebbero di quando in quando per varie cauſe ſpariti davanti gli occhj, come far ſogliono l'eſſenze più volatili. Doveva dunque nel lor Siſtema eſſer l'attrazione un carattere il più neceſſario, anzi l'origine di tutti gli altri; imperciocche ſe principali caratteri della materia ſono eſtenſione, e ſolidità, dovevano queſti riconoſcere la loro eſiſtenza da una previa forza attraente, e collegante le Monadi a ſegno, di poter queſte produrre il gran fenomeno della *materia*. Così ſe queſta è eſteſa, il detto Autore doveva riconoſcere una forza, che teneſſe unite le parti ineſteſe

ftefe per formar l'eftenfione. Se è coefa, doveva effervi fimilmente una forza attraente gli Enti femplici, e immateriali a fegno di venire a generare col loro ammaffamento la coefione. Se è folida, doveva effer prima eftefa, e coefa, e perciò fupponeva anteriormente attraibili i fuoi elementi; ma quefti fono i fuoi caratteri efsenziali; dunque è manifefto l'affunto.

256. Di più, potevano dimoftrare molto facilmente *a priori* almeno la forza di aderenza tra corpo e corpo; imperciocche effendo indifpenfabile alle Monadi una forza collegatrice inerente ad effe, ed effendo nel loro Siftema i corpi compofti di Monadi, quefto carattere doveva effer neceffariamente infeparabile anche riguardo alle Monadi eftreme, che rimanevano fcoperte a formarne la fuperficie; dunque tra corpo e corpo a tutta foftanza, come pure tra fuperficie e fuperficie doveva effere affolutamente neceffaria una forza infeparabile, ed intima, che li richiamaffe all'unione reciproca, e che ve li teneffe ftretti fecondo quell'energia, che foffe loro toccata in forte, e ciò perche reftaffero i fenomeni naturali effettuati.

257. Quanto ho detto del Leibnizio, dico ancora del Newton, il quale dal fupporre la materia organizzata di parti divifibili all'infinito, non doveva moftrar, come fece, alcun dubbio fulla neceffità d'una forza intrinfeca che ne collegaffe le particelle infinitefime. In fomma in qualunque altro Siftema di principj corporei gia immaginato da i Filofofi bifogna ammettere quefta forza, come neceffaria a tenere unite le parti coftitutive della materia, acciò foffe coefa, e in confeguenza come il fonte di tutte l'altre di lei proprietà.

Imperciocche se le sue particelle fossero composte d'altre infinitesime, e ciò interminabilmente, come le concepì il Newton, posto, che non vi sia una forza, che le colleghi, ne seguirebbe, che esisterebbe la materia divisa, e sciolta all'infinito; il che ripugna (101.).

S C O L I O II.

258. Un altro argomento a favore della mia opinione sugli Atomi presentamisi alla immaginazione. Se gli Atomi fossero composti di particelle divisibili per natura all'infinito, sarebbero molto facilmente frangibili, ed eccone la prova. Giacchè il contatto di due Atomi omogenei è quanto, benche inassegnabile, ed è separabile da una piccola forza per l'esperienza, se s'immaginerà dentro la sostanza d'uno di tali Atomi in qualunque luogo un contatto della medesima estensione, sarà suscettibile anch'esso di separabilità, e di scissura, il che è innegabile, concorrendovi esattamente l'istesse circostanze; ma per separare il contatto di due Atomi omogenei richiedesi, come si è detto, piccola forza, che agisca in un tempuscolo; dunque per dividere in due un Atomo intero basterà parimente una forza altrettanto piccola, che agisca successivamente al più in un tempo assegnabile, e perciò l'Atomo sarà frangibile.

Il Cav. Newton poi s'accorda con molti Filosofi sì antichi, che moderni a stabilire, che, se gli Atomi fossero dissolubili, tutta la Natura si troverebbe in confusione, e in tumulto [a], in vece di mantener costantemente il bell' ordine, ond'è

[a] *Optic. Lib. III. Quaest. XXXI.* § *pag.* 325. *Edit. Lausan.* & *Genevae* 1740.

ond'è dotata; dunque se gli Atomi fossero per natura divisibili in infinito, questo disordine sarebbe gia da gran tempo accaduto; ma non vi è il minimo contrassegno, nè che sia accaduto, nè che sia per accadere; dunque, anche inerendo a i principj Newtoniani, gli Atomi non solamente non sono per natura divisibili in infinito, ma ripugna anche il supporre, che siano ne' loro componenti corredati d'una forza ad ogni forza in natura insuperabile.

259. Piacemi illustrare l'addotto ragionamento con un fatto molto ovvio. Diasi un urto in un vaso, che sia pieno d'acqua con in fondo poca terra sottilmente polverizzata, si vedranno manifestamente scompigliarsi, e sconvolgersi sossopra tutti quanti i suoi componenti: or l'acqua passa per corpo semplicissimo, cioè per un' innumerabil congerie di Atomi omogenei posti al contatto; dunque un urto è capace di sciorre un numero prodigiosamente esorbitante di contatti, la somma de' quali, giacche sono quanti, benche ciascuno inassegnabile, non si può negare, che non superi quel numero di contatti, con cui una particella, o una, per così dire, piccolissima fetta di Atomo aqueo combacia da una parte col rimanente. Se dunque i Newtoniani vogliono tenere alcuni loro principj, li conviene concedere, che esistano gli Atomi dotati d'un perfetto continuo, e in conseguenza incapaci per natura di divisione, non che divisibili all'infinito; il che viene a confermare ciò, che si è antecedentemente stabilito.

Sco-

SCOLIO III.

260. Ho ritenuto il nome d'*attrazione* (che il Canonico Rossetti (a) forse più acconciamente chiama *genio*, *inclinazione*, *appetenza &c.*), per esser più generalmente ricevuto, quantunque non vi manchino persone, che al sol sentir nominarla si arruffino, e si raccapriccino da capo a piede, come gli Idrofobi alla terribil vista dell'acqua. Alcuni in Francia si servono più tosto del nome di *affinità*, *rapporto*, *convenienza &c.*. Si può veder ciò in M. Macquer (b). Io porrò qui uno squarcio dell'estratto fattone dal Giornalista Francese. (c) „ 1.) Tutte l'esperienze chimiche provano, che „ vi ha tra le differenti sostanze una convenienza, o un'affi- „ nità, o un rapporto, per cui elleno si uniscono l'une alle altre. „ 2..) Che quest' affinità è maggiore tra alcune sostanze, che „ tra l'altre, dimodoche quella, che ha maggiore affinità, cac- „ cia via quella, che ne ha meno, e forma con l'altra una „ nuova combinazione. 3.) Che quando un corpo ha un „ rapporto eguale con quelli, che formano il primo com- „ posto, non li disunisce, ma si congiunge con essi. 4.) Che „ un corpo, che con le sostanze formanti un composto ha „ minore affinità, che esse non hanno fra loro, può disunir- „ le, associandosi ad una di esse, se egli stesso è composto „ di due sostanze, l'una delle quali abbia un'affinità più „ stretta, che non hanno le due, che si vuol disunire. 5.) „ Che i composti, che risultano dalla nuova unione, non han-

(a) *Insegnamenti Fisico-Matematici; Antignome Fisico-Matematiche.*

(b) *Elemens de Chimie theorique.*

(c) *Journ. des Sçav. Avril* 1750. *pag.* 315. *Edit. d'Amsterd.*

„ hanno più le medesime proprietà de' composti, che sono „ stati disuniti. 6.) Che tutte le sostanze simili hanno affi„ nità fra loro, come l'acqua con l'acqua &c. 7.) Che „ quantopiù le sostanze sono semplici, più forza hanno le „ loro affinità, e più difficile è in conseguenza di separar que„ ste sostanze „. Qualunque per altro sia il nome, che dar si voglia a questa forza, ciò poco importa, purche si convenga del fatto.

PROPOSIZIONE XL.

261. *Tutti i fenomeni della Materia vengono prodotti da due cause, cioè da forza meccanica, o immeccanica.*

La forza meccanica (249.) vien generalmente riconosciuta; l'immeccanica (250.) si è abbondantemente dimostrata. Or siccome fuor di queste due cause generali non se ne riconosce altra in natura, è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO I.

262. Dunque qualunque fenomeno sarà, o *maccanico*, o *immeccanico*, o *misto*.

COROLLARIO II.

263. Quando dunque si dimostrerà, che in un fenomeno la forza meccanica non vi ha, ne vi può aver luogo, bisognerà dedurne per conseguenza necessaria, che ve l'abbia la forza immeccanica; onde con le leggi di questa dovrà il fenomeno essere sciolto.

Co-

COROLLARIO III.

264. Che se si troverà, che amendue vi concorrano, e che il Problema perciò sia *misto* (262.), converrà fare il possibile per separarle, acciò in tal guisa l'effetto, o l'energia di ciascuna a parte riconoscer si possa.

COROLLARIO IV.

265. Posto poi, che sia puramente *immeccanico*, bisogna osservare, se vi concorrano la gravità, e l'attrazione congiuntamente, o se una di loro produca l'effetto, e ciò per riconoscerne separatamente l'azione, e potendo, la sua quantità.

SCOLIO I.

266. I Fautori stessi delle forze immeccaniche disprezzano molto frequentemente l'addotte cautele, pronunziando con troppa franchezza, che quel tal fenomeno, che hanno fra mano, venga prodotto ex. gr. dall'attrazione, ed invitando in tal guisa gl'indagatori della natura a credergli sulla loro parola. Essi in ciò fare danno in un altro estremo simile a quello de' Meccanici, che pretendono, senz'averlo prima dimostrato, che tutti i fenomeni a forza d'impulso possano esser convincentemente spiegati; quindi è che i medesimi partitanti favorevoli alle forze immeccaniche, vengono con le loro ipotetiche supposizioni a screditare questo carat-

rattere importantissimo della materia. E' dunque necessario aver sempre in vista il Corollario secondo, per non essere accusati di visionarj.

I Filosofi dividono tutte le produzioni in animali, in vegetabili, e in minerali. Secondo tal divisione tutte le sostanze, che non sono nè animali, nè vegetabili, debbono esser necessariamente riposte tra i minerali. Non altrimenti un fenomeno; se non è originato dall' impulso, dev' essere assolutamente prodotto dalla gravità, o dall' attrazione; ma avvertasi, che quando si vuole escludere il meccanismo per sostituirli l' immeccanismo, non si deve far ciò sulla riflessione, che una causa meccanica sia a noi impercettibile, bisogna provare, che il meccanismo sia o impossibile, o incompatibile col fenomeno, che si ha fra mano, ed in questo senso va preso il detto Corollario secondo (263.).

267. Quando però il detto metodo assegnato nella soluzione de' fenomeni si va mettendo in pratica, è necessario star cauti, per non esser ingannati da qualche impulso, il quale ci seduca sotto le apparenze d'attrazione, e viceversa. Il gran Boerhaave ci consiglia a star sull' avviso, per ciò che risguarda le soluzioni de' corpi, affinche non confondiamo l' effetto meccanico con l' immeccanico. *Ossa*, (egli dice) *annosi Bovis cocta in aqua, vase aperto, vix mutantur diuturna ebullitione; eadem in machina coctrice Boyleana, vel Papiniana, pauco tempore mollescunt, solvuntur. Discrimen, quod aquæ partes, arctissime compressæ ad os, agitentur supra illud summo cum attritu* (a). Una goccia d' acqua incava col continuo stillicidio una pietra. Si veggono i massi ne' monti incanalati d' una

X no-

(a) *Elem. Chem. T. I. De Menstr.* | *p.* 356. *Col.* 2. *Edit. Ven. An.* 1737.

notabil fossa in quel luogo, per cui rovina l'acqua da gran tempo. Errerebbe in tal caso chi ne risondesse la causa nell' attrazione. Bisogna poi dall' altro canto mantenersi bene in guardia per non deferir troppo al meccanismo. *Peccat proinde*, (dice il medesimo Boerhaave), *quisquis virtuti Mechanicæ plus tribuit, quem Naturæ Auctor illi concessit: limites habet justos, intra quos qui cautus remanet, prudens iisdem, quousque datur, nec ultra, utetur ad interpretanda Chemica. En hæc expressa mihi amore veri sententia super his.* Sospendasi dunque il giudizio, e quando veggasi in un fenomeno, che vi sono de' fatti inconciliabili totalmente con le regole, e con le leggi stabilite nel meccanismo, si decidano sicuramente immeccanici.

SCOLIO II.

268. Con tali premesse (262. *e segg.*), si può stabilire la divisione generale della Fisica in Meccanica, Immeccanica, e Mista, a titolo di contemplare i fenomeni separatamente, per poi poterli comprendere, e spiegare congiuntamente. Su tal fondamento io ho preso ad esaminare le forze immeccaniche semplici, cioè da se sole senza combinazione d' altre forze meccaniche, vale a dire, d'impulso, di strofinamento, o di resistenza, tantopiù, che questa importantissima parte della Fisica, la quale si può dire tuttavia nascente, raggirasi sopra principj tali, che, come ho gia dimostrato (245.), possono essere i principj del meccanismo. In fatti i distaccamenti delle rupi, e de' corpi tutti dal suo luogo; il corso dell' acque, le germinazioni delle piante; l'evaporazioni de' corpi, e le

e le ricadute loro in pioggia, neve, e grandine; l'accensioni tanto ne' luoghi alla superficie Terrestre, e sott'essa, che nell'aria; i terremoti, i venti, e tant'altre circostanze gran mutazioni producono, e produrrebbero sul nostro Globo Terraqueo, quand'anche non vi fossero Abitatori. Che se sul medesimo piede si formerà una Fisica Meccanica, nel mettere poi insieme la Fisica Mista, che è la piu difficile, perche più composta, si potrà più agevolmente conoscere, quali cause concorrano all'effettuazione d'un fenomeno complicato, considerando, e computando le forze meccaniche, ed immeccaniche separatamente, e poi facendone l'aggregato, o il defalco, per confrontarle con la loro azione combinata, e per venire in tal guisa alla vera, e stabile spiegazione di qualche proposto fenomeno.

Fine della Parte Prima.

Vetus est, omniumque communis sententia; si quis ea quæ magna sunt, recte transigere velit, in parvis quibusdam prius illa facilioribusque, quam in maximis considerare debere.

PLATO in Sophista paulo post init.

ELEMENTI
DI
FISICA IMMECCANICA.
PARTE SECONDA.

CAPITOLO PRIMO
Delle Tangenti.

DEFINIZIONI.

I.

1. Diametro d'una Curva è quello, che sega per mezzo le parallele confinanti da una parte, e dall' altra col di lei perimetro. Così AB (*Fig.* 5.) è il diametro della Curva MAM, perche sega per mezzo le parallele MM. Diceſi ſpecialmente *Aſſe*, quando le taglia ad angoli retti.

II.

2. Vertice della Curva chiamaſi il punto A, da cui vien tirato il Diametro, o l' Aſſe.

ORDI-

III.

3. ORDINATE sono le linee equidistanti MM, che confinano da ambe le parti d' una Curva MAM, e che son tagliate per mezzo dal diametro, o dall' asse AB. Le loro metà diconsi semiordinate, benche sogliano ordinariamente chiamarsi anch' esse *ordinate*, e *applicate*.

IV.

4. ASCISSA dicesi quella porzione AP di diametro, o di asse, che viene ad esser compresa tra 'l vertice, e l' ordinata, o la semiordinata, ovvero tra un punto fisso, e l' ordinata.

V.

5. Se all' applicata PM (*Fig. 6.*) d' una Curva qualunque AM tirisi un' altra applicata infinitamente prossima *pm*, e dal punto M conducasi la M*o* parallela all' asse, o diametro AP, differirà la prima dalla seconda applicata d' un impercettibile quantità *mo*, quale dirassi *inassegnabile*, o *infinitesima del primo grado*.

COROLLARIO I.

6. Dunque anche la P*p*, e la M*m*, che non differisce sensibilmente da una linea retta, saranno inassegnabili, o infinitesime del primo grado.

Co-

COROLLARIO II.

7. Quindi vedesi, che richiedendosi un numero esorbitante delle mo per formare la pm, questa sarà sensibilmente sempre l' istessa, aggiungasele, o tolgasele la detta infinitesima mo; il medesimo dicasi della AP rispetto alla Pp.

VI.

8. Se un' infinitesima mo suppongasi divisa in maniera, che la parte recisa sia terza proporzionale dopo le po, om; ovvero quarta proporzionale dopo le po, om, oM; questa si chiamerà *inassegnabile*, o *infinitesima del secondo grado*.

COROLLARIO I.

9. Dunque tanto il quadrato della mo, e della Pp, quanto il loro rettangolo P$p \times mo$, saranno un' inassegnabile del secondo grado; il che ravvisasi facilmente, facendo la quantità assegnabile PM, ovvero $po = 1$.

COROLLARIO II.

10. Quindi conoscesi, quali sono le inassegnabili, o infinitesime del terzo, e del quarto grado, e in conseguenza de' gradi superiori.

Co-

Corollario III.

11. Giacche la giunta, o il defalco della *om*, rifpetto alla *pm*, o della P*p* rifpetto alla AP, non viene a produrre alterazione veruna conofcibile (7.); vale a dire, fe la giunta, o il defalco d' un' infinitefima del primo grado non altera una quantità affegnabile, anche la giunta, o il defalco d' una, o più infinitefime del fecondo grado non farà capace d' alterare la quantità d' un' infinitefima del primo, e perciò incomparabilmente meno potrà alterare una quantità affegnabile; il che dimoftra, che quando fi voglia tralafciare una, o più infinitefime del fecondo grado, o de' gradi fuperiori, la quale faccia fomma, o differenza con una infinitefima del primo grado, fi potrà fare fenza il minimo fofpetto d'error fenfibile, particolarmente fe tal fomma, o differenza riguardi una quantità affegnabile.

Scolio.

12. Suppongafi per maggior evidenza, che fia ftata prefa con tutta l'efattezza immaginabile l'altezza d' una montagna, e che dopo tal operazione il vento abbia trafportato ful punto più fublime di effa un minutiffimo granello d'arena; niuno, che faccia ufo di ragione, pretenderà, che fi debba ripigliar da capo per tal motivo la mifura, perche quando fi ripigliaffe inceffantemente, non fi potrebbe affegnare con le mifure ufuali l'altezza d' una particella appena vifibile. Similmente chi voleffe fommare le moli d' un migliajo

di

di montagne, e disprezzasse in ciò fare un migliajo, o due di piccolissimi granelli d' arena, tal difetto non sarebbe certamente reperibile dal più accorto, ed esatto Geometra. Immaginiamoci adesso, che come stà la montagna a quel granellino d'arena, così stia questo ad una sua porzione, sfido il più scrupoloso a farne caso, vedendosi manifestamente, che impercettibile è alla mente istessa una tal misura, non che eseguibile cogl'istrumenti a tal fine destinati, ancor quando si annichili di tali porzioni quel numero, che si vuole. Si adattino adesso i casi proposti alle quantità infinitesime, inassegnabili, tanto del primo, quanto de' gradi superiori, e resterà ognuno convinto, che sono senza il minimo scrupolo disprezzabili, particolarmente le inassegnabili de' gradi superiori rispetto alle quantità assegnabili. Queste quantità poi, come insegneranno gli Esempj, sono un ripiego, e uno strattagemma geometrico, per far tra esse comparire le quantità assegnabili, che si ricercano. Ma queste verità saranno a suo luogo con esattezza geometrica dimostrate.

COROLLARIO IV.

13. Ciò, che si è detto d' una linea inassegnabile, o elementare riguardo a una linea assegnabile, può applicarsi ad una superficie, o ad un solido inassegnabile, o elementare rispettivamente ad una superficie, o ad un solido assegnabile.

VII.

14. EQUAZIONE di una Curva dicesi il rapporto, che ha costantemente l'ascissa all' ordinata della medesima, qual

rapporto costituisce il carattere, o la natura particolare di essa Curva.

VIII.

15. CURVA ALGEBRAICA, O ALGEBRICA dicesi quella, la di cui equazione contiene soltanto linee rette assegnabili; ovvero le di cui ascisse hanno all'ordinate un rapporto esprimibile per mezzo d'assegnabili linee rette.

IX.

16. CURVA TRASCENDENTE, O MECCANICA è quella, in cui il rapporto tra l'ordinata, e l'ascissa non è esprimibile in linee rette assegnabili.

PROPOSIZIONE I.

17. *Tirar la Tangente a qualunque Curva Algebrica.*

Sia AM (*Fig.6.*) la data Curva, la di cui ascissa AP, e l'applicata PM; tirisi a questa l'applicata infinitamente prossima pm, e dal punto M abbassata la perpendicolare Mo, suppongasi condotta dal punto M la Tangente MT. Per esser simili i Triangoli Mom, TPM, si avrà l'analogia mo:Mo::PM: PT; trovato dunque il rapporto delle mo, oM, ovvero delle mo,Pp, si verrà in cognizione della sottangente PT, dimodoche condotta la TM, questa sarà la tangente desiderata. Per trovar tal rapporto, riflettasi, che essendo anche Ap un'ascissa, e la pm la sua applicata corrispondente, anche nelle coordinate AP + Pp, PM + om deve avverarsi l'equazio-

zione alla medesima Curva AM. Espressa dunque con queste tal equazione, che dirassi secondaria, e da essa defalcata l'equazione primaria indicata dalle sole coordinate AP, PM, indi cancellate le quantità infinitesime del secondo grado come superflue (11. 12.), resteranno nell'equazione le quantità assegnabili miste all'inassegnabili Pp, om; sicche risoluta tal equazione in analogia, ovvero per essere PT : PM :: Pp : om, sostituiti in essa equazione questi equivalenti, si otterrà in termini tutti finiti, come apparirà meglio dagli Esempj seguenti, il ricercato rapporto; il che &c..

E S E M P I O I.

18. Sia AM (*Fig.6.*) una Parabola Apolloniana, la di cui equazione secondaria (fattone per compendio il parametro $= 1.$) è $AP + Pp = \overline{PM}^2 + 2\,PM \times om + \overline{om}^2$; tolgasi da questa l'equazione primaria $AP = \overline{PM}^2$, e cancellisi l'inassegnabile del secondo grado $\overline{om}^2$ (qual abolizione si supporrà sempre fatta in avvenire), resterà $Pp = 2\,PM \times om$; onde sostituiti gli equivalenti, si avrà $PT = 2\,\overline{PM}^2 = 2\,AP$; e però nella Parabola Apolloniana la sottangente sarà doppia dell'ascissa.

E S E M P I O II.

19. Se la Curva AM sarà una Parabola cubica, la di cui equazione prima è $AP = \overline{MP}^3$, la seconda equazione,

tralasciati gl' inassegnabili del secondo, e terzo grado, sarà $AP + Pp = \overline{PM}^3 + 3\overline{PM}^2 \times om$, da cui tolta la prima, si avrà $Pp = 3\,\overline{PM}^2 \times om$, e quindi $PT = 3\,\overline{PM}^3 = 3\,AP$; onde nella presente Parabola cubica la sottangente è tripla dell' ascissa.

ESEMPIO III.

20. Se AM sarà una Parabola, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^{\frac{2}{3}}$, ovvero $\overline{AP}^3 = \overline{PM}^2$, la seconda equazione sarà $\overline{AP}^3 + 3\,\overline{AP}^2 \times Pp = \overline{PM}^2 + 2\,PM \times mo$; onde $3\,\overline{AP}^2 \times Pp = 2\,PM \times mo$; e quindi $PT = \frac{2}{3}\frac{\overline{PM}^2}{\overline{AP}^2} = \frac{2}{3}AP$.

ESEMPIO IV.

21. Se AM sarà una Parabola, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^{\frac{3}{2}}$, ovvero $\overline{AP}^2 = \overline{PM}^3$, l' equazione seconda sarà $\overline{AP}^2 + 2\,AP \times Pp = \overline{PM}^3 + 3\,\overline{PM}^2 \times om$; onde $2\,AP \times Pp = 3\,\overline{PM}^2 \times om$; e quindi $PT = \frac{3\,\overline{PM}^3}{2\,AP} = \frac{3}{2}AP$.

Sco-

S c o l i o.

22. Proſeguendo in tal guiſa le ricerche per trovare la ſottangente d' altre Parabole di grado ſuperiore, ſi vedrà ben preſto, che mantengono coſtantemente nella loro ſottangente queſta legge, cioè che l' aſciſſa ſtà alla medeſima ſottangente, come l' unità all' eſponente dell' applicata diviſo per l' eſponente dell' aſciſſa; onde ſe l' equazione alle innumerabili Parabole, o Paraboloidi d' ogni ſpecie è compreſa in queſta formula generale $\overline{AP}^{m} = \overline{PM}^{n}$, ſtarà l' aſciſſa alla ſottangente, come $1 : \frac{n}{m}$, e perciò ſarà generalmente $PT = \frac{n}{m} \times AP$. E qui oſſerviſi, che quando la ſottangente è minore dell' aſciſſa, la Parabola, di qualunque rango ella ſiaſi, deve conſiderarſi rivolta con la conveſſità all' aſſe, il che ſuccede quando m è maggiore di n; così quando alla parte eſteriore della Parabola AM (*Fig. 6.*) la AQ ſia figura d' aſciſſa, e la QM di applicata, la ſottangente tQ è ſempre minore dell' aſciſſa AQ, come è manifeſto; il che ſerva giudizioſamente di regola per altri caſi conſimili, avvertendo, che la regola può eſſer fallace, quando la Curva aveſſe ciò, che chiamaſi *fleſſo contrario*. Che ſe ſarà $m = 2$, $n = 4$, la ſottangente ſarà ſempre doppia dell' aſciſſa, ed in fatti tant' è l' equazione $\overline{AP}^{2} = \overline{PM}^{4}$, quanto $AP = \overline{PM}^{2}$.

ESEM-

ESEMPIO V.

23. Sia la Curva M*m* (*Fig.* 7.) un' Iperbole Apolloniana tra gli Afintoti AT, AV, la di cui equazione è $1 = AP \times PM$, ovvero $AP = \frac{1}{PM}$, la fua feconda equazione farà $AP + Pp = \frac{1}{PM - Mo}$; perche, come è vifibile, l'ordinate fcemano della quantità M*o*, mentre l' afciffe crefcono della quantità P*p*; onde tolta la prima equazione, refterà $Pp = -\frac{1}{Mo}$, e quindi $PT = \frac{-1}{PM} = -AP$; ficche prefa la $PT = PA$, ma dalla parte oppofta all' origine dell'afciffa a caufa del fegno contrario, come nella figura, farà la fottangente richiefta.

ESEMPIO VI.

24. Sia l' equazione all' Iperbole cubica $AP = \frac{1}{MP^2}$, la fua feconda equazione farà $AP + Pp = \frac{1}{PM^2} - \frac{1}{2PM \times oM}$; onde $Pp = -\frac{1}{2PM \times oM}$; quindi $PT = -\frac{1}{2PM^2} = -2AP$; cioè nell' Iperbole cubica la fottangente prefa dalla parte contraria all' origine dell' afciffa, a caufa del fegno negativo, eguaglia il doppio dell' afciffa.

ESEM-

E S E M P I O VII.

25. Se sarà l'equazione $\overline{AP}^2 = \frac{1}{PM}$, che è alla parte opposta dell' Iperbole cubica, si avrà per seconda equazione $\overline{AP}^2 - 2AP \times Pp = \frac{1}{PM+Mo}$; onde $-2AP \times Pp = \frac{1}{Mo}$; quindi $PT = -\frac{1}{2}AP$.

S C O L I O.

26. Andando avanti, e facendo nuove ricerche, si conoscerà dopo non molto esame, che nelle Iperboli tra gli Asintoti le sottangenti prese dalla parte contraria mantengono un ordine costante, cioè sono tanto moltiplici dell'ascissa, quanto indica l' esponente dell' applicata, e ciò quando le potestà dell' applicate sono reciproche all' ascisse; ma quando al rovescio le potestà dell' ascisse sono reciproche all' applicate, allora le sottangenti sono tanto summoltiplici dell' ascisse, quanto indica l' esponente dell' ascisse medesime; onde supposto, che l' equazione generale all' Iperboli di qualunque specie sia $\overline{AP}^m = \overline{PM}^{-n}$, ovvero $AP = \overline{PM}^{-\frac{n}{m}}$, si troverà, che la formula per le Tangenti di tutte l' Iperboli in infinito tanto da una parte, che dall' altra, è generalmente

PT =

$PT = -\frac{n}{m} \times AP$, cioè l'isteffa delle Parabole (22.), ma col fegno negativo.

ESEMPIO VIII.

27. N. 1. Sia l'equazione $\overline{PM}^2 = 1 \pm \overline{AP}^2$, che col fegno + è all' Iperbole equilatera, e col fegno — è al Cerchio, computate l'afciffe dal centro; la fua feconda equazione farà

$\overline{PM}^2 \pm 2\,PM \times mo = 1 \pm \overline{AP}^2 \pm 2\,AP \times Pp$; onde $\pm 2\,PM \times mo = \pm 2\,AP \times Pp$; quindi $AP : PM :: PM : PT$; il che dimoftra, che tanto nel cerchio, quanto nell' Iperbole equilatera la fottangente è terza proporzionale dopo l' afciffa, e la femiordinata. E qui pure s' avverta, che al crefcere dell' afciffe nel Cerchio fcemano l' ordinate.

N. 2. Ovvero fia l' equazione $\overline{PM}^2 = AP \pm \overline{AP}^2$, che col fegno affermativo è all' Iperbole equilatera, e col negativo al cerchio, computate l' afciffe dal vertice della Curva; farà la feconda equazione $\overline{PM}^2 + 2\,PM \times mo = AP + Pp \pm 2\,AP \times Pp \pm \overline{AP}^2$; onde $2\,PM \times mo = Pp \pm 2\,AP \times Pp$; in confeguenza $\frac{2\overline{PM}^2}{1 \pm 2\,AP} = \frac{AP \pm \overline{AP}^2}{\frac{1}{2} \pm AP} = PT$.

ESEM-

ESEMPIO IX.

28. Sia l' equazione all' Ellisse congiuntamente, e all' Iperbole $\overline{PM}^2 = Q \times AP \pm Q \times \overline{AP}^2$, in cui il maggior asse $= 1$, ed il parametro $= Q$, ed ove il segno negativo appartiene all' Ellisse; sarà la seconda equazione $\overline{PM}^2 + 2\,PM \times mo = Q \times AP + Q \times Pp \pm Q \times \overline{AP}^2 \pm Q \times 2\,AP \times Pp$; onde $2\,PM \times mo = Q \times Pp \pm Q \times 2\,AP \times Pp$; quindi $\frac{2\,\overline{PM}^2}{Q \times (1 \pm 2AP)} = \frac{2\,AP \pm 2\,\overline{AP}^2}{1 \pm 2\,AP} = PT$.

ESEMPIO X.

29. Sia l' equazione $PM \times AP = PN \times AB$ (*Fig.* 8.) qual' equazione è alla Curva detta *Versiera* dal celebre Padre Grandi [a]; facendo per brevità il diametro AB del semicerchio $ANB = 1$, la seconda equazione sarà $(PM - Mo) \times (AP + Pp) = PN + tn$; ma $tn = Pp \times \left(\frac{1 - 2\,AP}{2\,PN}\right)$ (27. *N.* 2.); dunque $PM \times AP + PM \times Pp - AP \times Mo = PN + Pp \times \left(\frac{1 - 2\,AP}{2\,PN}\right)$; onde $PM \times Pp - AP \times Mo = Pp \times \left(\frac{1 - 2\,AP}{2\,PN}\right)$

(a) *Note al Trattato del* Galileo *del moto naturale accelerato. V. Opere del* Galileo *T. III. in Firenze* 1718. *pag.* 393.

ovvero $-AP \times Mo = Pp \times \left(\frac{1-2AP}{2PN}\right) - Pp \times PM$; il che dà l' analogia $-Mo : Pp :: \frac{1-2AP}{2PN} - \frac{PN}{AP} : AP :: \frac{-1}{2PN} : AP :: \frac{-PN}{AP} : PT = -(2AP - 2\overline{AP}^2) = -\left(\frac{2AB \times AP - 2\overline{AP}^2}{AB}\right) = -\frac{AP \times PB}{AC}$.

S c o l i o I.

30. Avvertasi, (1. che per esser la sottangente PT or minore, or eguale, or maggiore della PB, ne viene, che la Versiera in questione ora rivolge all' asse la convessità, ed ora la concavità; e però questa Curva deve avere il flesso contrario, o regresso; (2. che si è presa Mo col segno negativo, perche la PM decresce al crescere della AP; (3. che per il segno negativo la sottangente va presa dalla parte opposta all' origine della ascissa, come mostra la figura.

S c o l i o II.

31. Senza che io l'avvertisca, conoscesi chiaramente, che questo metodo per trovar le Tangenti è applicabile anche alle Curve trascendenti, o meccaniche (16.) ogni volta che ne venga assegnata l'equazione. Ma vi sono molti casi tanto nelle Curve algebriche, quanto nelle trascendenti, ne' quali si può senza le previe equazioni ripescare con la sola analogia

logia il valore della fottangente. Queste due circoſtanze ſi metteranno in chiaro negli Eſempj ſeguenti.

ESEMPIO XI.

32. Sia AMC (*Fig.9.*) l'Elice, o Spirale d'Archimede, il di cui Cerchio genitore APD, l'aſciſſa AP, e l'applicata CM; dal centro C tiriſi la Cp formante con la CP un angolo infinitamente piccolo PCp, e cogl'intervalli CM, Co deſcrivanſi i due archi infiniteſimi MN, mo. Per eſſere Mo il lato, che deve confonderſi con la tangente, ne verrà, che ſtarà NM : Mo, come la ſottangente alla tangente; ma la MN è perpendicolare alla CP; dunque abbaſſata la CT perpendicolare in C alla CP, ſuppongaſi condotta la tangente TM. Siccome fatta la periferia circolare $= R$, l'equazione alla Spirale in queſtione è $AC \times AP = R \times CM$, la ſeconda equazione ſarà $AC \times AP + AC \times Pp = R \times CM - R \times Mm$; onde $AC \times Pp = - R \times Mm$; che darà $Mm : Pp :: AC : - R$, e perciò $\frac{Pp}{Mm} = - \frac{R}{AC}$.

In oltre abbiamo $CP : CM :: Pp : MN = \frac{Pp \times CM}{CP}$, come ancora $oN : NM :: MC : CT$; ovvero $Mm : \frac{Pp \times CM}{CP} :: MC : CT = \frac{Pp \times \overline{CM}^2}{Mm \times CP} = - \frac{R \times \overline{CM}^2}{AC \times CP} = - \frac{AP \times CM}{CP}$; ſicche dal centro C con l'intervallo CM deſcritto l'arco circolare BM, queſto ſarà eguale alla ſottangente CT. Dipen-

de dunque la determinazione della sottangente nella spirale ordinaria, o quadratica dalla quadratura del Cerchio.

COROLLARIO.

33. Nell' Elice ordinaria, o Archimedea è manifesto, che la sottangente CT stà come il quadrato del raggio CM, e ciò per esser costanti le R, AC, ovvero CP.

ESEMPIO XII.

34. Sia AM una spirale cubica (*Fig. 9.*), la di cui equazione $AC \times \overline{AP}^2 = R^2 \times CM$; sarà la sua seconda equazione $AC \times \overline{AP}^2 + AC \times 2\,AP \times Pp = R^2 \times CM - R^2 \times Mm$; onde $2\,AC \times AP \times Pp = -R^2 \times Mm$; quindi $\frac{Pp}{Mm} = \frac{-R^2}{2\,AC \times AP}$; ma nell' Esempio antecedente si è dimostrato $CT = \frac{Pp \times \overline{CM}^2}{Mm \times CP}$; dunque in questo Esempio sarà $CT = \frac{-R^2 \times \overline{CM}^2}{2\,AC \times AP \times CP} = -\frac{1}{2}\frac{AP \times CM}{CP}$.

Sco-

S c o l i o.

35. Se la AM (*Fig. 9.*) fosse una spirale, la di cui equazione $\overline{AC}^3 \times \overline{AP}^2 = R^2 \times \overline{CM}^3$, si troverebbe essere la sua sottangente $CT = -\frac{3}{2}\frac{AP \times CM}{CP}$. Se la detta spirale avesse l'equazione $\overline{AC}^2 \times \overline{AP}^3 = R^3 \times \overline{CM}^2$, si troverebbe la $CT = -\frac{2}{3}\frac{AP \times CM}{CP}$; dal che ricavasi, come ancora da ulteriori operazioni sopra altre equazioni, che le sottangenti di tutte le spirali all'infinito hanno sempre l'espressione $-\frac{AP \times CM}{PC}$ moltiplicata nell'esponente dell'ordinata CM, diviso per l'esponente dell'ascissa AP; detto dunque n il primo, m il secondo esponente, l'equazione generale per l'infinite spirali sarà $\overline{AC}^n \times \overline{AP}^m = R^m \times \overline{CM}^n$; e l'espressione generale per le loro infinite sottangenti sarà $-\frac{n}{m}\frac{AP \times CM}{CP} = -\frac{n}{m}BM$.

C o r o l l a r i o.

36. Quindi essendo costanti le R, AC, la AP sarà proporzionale alla $\overline{CM}^{\frac{n}{m}}$, e però le sottangenti nell'Elici, o spirali staranno generalmente come $\overline{CM}^{\frac{n+m}{m}}$.

ESEM.

E s e m p i o XIII.

37. Sia intorno all'asse AP (*Fig.* 10.) qualunque Curva AQ, di cui sia nota la Tangente QB, e la di cui applicata QP si prolunghi in M talmente, che sia $PM = AQ$, si può trovare speditamente la tangente della natane Curva AM; imperciocche tirata l'infinitamente prossima *qpm*, ed abbassate le perpendicolari Qr, Mo, facciasi la solita analogia $mo : oM$, ovvero $Qq : Qr :: MP : PT$; ma $Qq : Qr :: QB : BP$; dunque $QB : BP :: MP : PT$.

Corollario I.

38. Sicche se la Curva AQ fosse un Cerchio, al di cui centro C concorressero le AC, QC; per essere $QB : BP :: CQ : QP$, la sottangente PT sarà terza proporzionale dopo il raggio del Cerchio genitore, la sua applicata, e la corrispondente periferia, cioè $PT = \frac{QP \times Arc.\,AQ}{QC}$; ovvero sarà proporzionale al prodotto dell' applicata nella corrispondente periferia circolare; e questa PT è la sottangente d'un'ungula cilindrica appianata, di cui dovrassi parlare in appresso, qual sottangente dipende, come è visibile, dalla quadratura del Cerchio.

Corollario II.

39. Che se la PM sarà eguale alla somma delle due Curve AQ, AN intorno al medesimo asse AP, che abbiano la medesi-

desima origine in A, e delle quali siano note le tangenti QB, ND, allora sarà $mo = Qq + Nn$, come è evidente; onde si potrà trovar facilmente il rapporto delle mo, oM; imperciocchè essendovi le due analogie,

$qQ : Qr :: QB : BP$

$nN : Ns :: ND : DP$, e per esser $Qr = Ns$, se ne dedurrà $nN + qQ : Qr :: ND \times BP + QB \times DP : DP \times BP :: MP : PT$. Un simil ripiego può prendersi quando le Curve generatrici sono più di due.

COROLLARIO III.

40. Se poi la PM fosse eguale alla differenza delle due Curve AQ, AN, è chiaro, che sarebbe $mo = Nn - Qq$; onde $mo : oM$, cioè $Nn - Qq : Qr :: ND \times BP - DP \times QB : DP \times BP :: MP : PT$. Così procedasi quando le Curve generatrici fossero più di due.

ESEMPIO XIV.

41. *N. I.* Intorno all'asse AQ (*Fig.* 11.) sia una Curva qualunque AP, di cui sia nota la tangente FP, e la di cui applicata QP si estenda in M in maniera, che sia sempre la PM eguale al perimetro PA, si domanda la tangente della nuova Curva AM.

Supposte QPM, qpm, infinitamente prossime, e da' punti P, M abbassate l'eguali perpendicolari Ps, Mr, e supposta al solito tirata al punto M la tangente ETM, che incontri

in T

in T la tangente FP condotta al punto P della Curva AP, e in E la sottangente QF, tirisi dal punto M la Mo parallela alla tangente TP, la quale sarà parallela, ed eguale alla Pp, per esser questa la continuazione della tangente TP. Si avrà per tanto l'analogia $mo : oM :: MP : PT$; ed è l'arco $AP = PM$, e perciò la seconda equazione è $AP + Pp = PM + mo$, che dà $Pp = mo$; dunque ancora $PM = PT$; onde presa nella tangente FP la $PT = PM$, e congiunta TM, sarà tirata la tangente, qual'esecuzione dipende dalla rettificazione della Curva AP, a cui si eguaglia.

In altra maniera,

N. 2. Per esser $Mo = Pp$, $Mr = Ps$, e gli angoli in r, s retti, il triangolo Mor sarà eguale, e simile al triangolo Pps; onde $or = ps$; in oltre $Mo = mo$ perche amendue eguagliano Pp. Posto ciò, in due maniere sciogliesi il Problema; 1.) perche essendo $mo = oM$, sarà ancora per la similitudine de' triangoli $MP = PT$; 2.) perche essendo $mr = Pp + ps$, sarà $mr : rM :: Pp + ps : Ps :: MQ : QE$; ma $Pp + ps : Ps :: FP + PQ : FQ$; dunque $QE = \frac{MQ \times QF}{FP + PQ}$.

COROLLARIO I.

42. Se la Curva AP sarà un Cerchio, la Curva AM sarà una Cicloide, in cui $QM = QP + PA$, ed allora la tangente ME sarà, come avvertì fino il celebre Torricelli, parallela alla corda corrispondente AP del cerchio genitore; imperciocchè congiunta al centro C la PC, si avrà $FP + PQ :$

FQ::

FQ::PC+CQ:PQ; ma PC+CQ:PQ::PQ:QA; dunque MQ:QE::PQ:QA.

SCOLIO.

43. Ciò si dimostra anche in questa maniera. Tirata al punto A la tangente AI, che incontri in I la tangente PF; per essere AI=IP, sarà l'angolo IAP eguale all'angolo IPA, ed è l'angolo IAP eguale all'angolo APQ; dunque gli angoli IPA, APQ sono eguali. In oltre per esser PM=PT, anche gli angoli in M, T saranno eguali, onde l'angolo TPQ esteriore eguaglierà il doppio dell'angolo interiore, ed opposto PMT, e perciò essendo l'angolo QPA eguale all'angolo QMT, la AP dovrà esser parallela alla MT; il che dimostra, che la Cicloide taglia la base ad angolo retto, giacche ivi la tangente deve esser parallela al diametro del Cerchio genitore.

COROLLARIO II.

44. Se la PM avrà al Perimetro PA un rapporto qualunque, si troverà nel medesimo modo la tangente PT; sicche se l'equazione fosse $\frac{a}{b}\times MP=PA$, sarà la tangente $PT=\frac{a}{b}\times PM$ (prese le a, b per due quantità); posto dunque, che la AP fosse un Cerchio, la Curva AM sarebbe una Cicloide; cioè allungata, allorche $b>a$; scorciata, allorche $b<a$; giusta, se $b=a$.

Corollario III.

45. Che ſe l'applicata QM ſarà eguale alle due applicate QP, QV, e ai due archi AP, AV di due curve intorno al medeſimo aſſe AQ, che abbiano l'isteſſo vertice in A, e di cui ſian note le tangenti PF, VG, allora ſarà $rm = Pp + ps + Vu + ut$; onde avremo $mr : rM :: Pp + ps + Vu + ut : Ps$. Per trovare queſti rapporti in termini aſſegnabili, facciaſi

$$Vu + ut : Vt :: VG + VQ : QG$$
$$Pp + ps : Ps :: FP + PQ : FQ;$$

onde $Ps \times Vu + Ps \times ut + Pp \times Vt + ps \times Vt : Ps \times Vt :: FQ \times VG + FQ \times VQ + FP \times QG + PQ \times QG : QG \times FQ;$

cioè per eſſere $Ps = Vt$, ſi avrà finalmente

$$Vu + ut + Pp + ps : Ps :: FQ \times VG + FQ \times VQ + FP \times QG + PQ \times QG : QG \times FQ;$$

il che ſerva di regola quando le Curve generatrici foſſero più di due.

Corollario IV.

46. Ma ſe al contrario ſarà la QM (*Fig.* 12.) eguale alla differenza del perimetro AP, e della corriſpondente applicata PQ, allora ſarà $rm = Pp - ps$; onde per trovar la tangente alla detta Curva AM, ſi avrà $rm : rM :: Pp - ps : Ps :: PF - PQ : QF :: MQ : QE$; dimodoche ſe la Curva AP ſia

sia un Cerchio, condotta al centro C la PC, si avrà $PF - PQ : QF :: PC - QC : PQ :: AQ : PQ$; onde $AQ : QP :: MQ : QE = \frac{PQ \times MQ}{AQ}$.

COROLLARIO V.

47. Se poi $QM = AP + AV - QP - QV$, allora avremo $rm = Pp - ps + Vu - ut$; onde con un computo simile all'antecedente (45.) si troverà $FQ \times VG - FQ \times VQ + FP \times QG - PQ \times QG : QG \times FQ :: MQ : QE$.

ESEMPIO XV.

48. Sia una Curva qualunque ANn (*Fig.* 13.), a cui sappiasi tirar la tangente, e da essa nasca un' altra Curva AM con questa legge, che le sue applicate PM, pm prese sulle applicate PN, pn della prima Curva prolungate, eguaglino i rami corrispondenti AN, An condotti dal vertice A al perimetro della detta prima Curva ne' punti N, n. Per trovar la tangente MT della seconda curva AM, suppongansi MPN, mpn infinitamente prossime, e da' punti M, P, N si abbassino le perpendicolari Mo, Pp, Nr, indi dal punto A alzata sulla An la perpendicolare AV, che vada a ferire in V la tangente NV, e dal punto V condotta sulla mn la VB parellela all'asse AP, descrivasi dal centro A con l'intervallo AN l'archetto Nr; sarà $rn = mo$; $Nr = Mo$; onde trovata la relazione tra rn, Ns, si sarà trovata ancor quella tra mo, Mo, e in conseguenza si avrà il rapporto tra l'applicata PM, e la sottangente PT.

Aa 2 Essen-

Essendo pertanto simili i triangoli nAV, nrN; nVB, nNs, si avrà $nr:rN::nA:AV$

$rN:Nn::AV:VN$

$Nn:Ns::VN:VB$;

dal che componendo le ragioni ricavasi

$nr:Ns::nA:VB$; onde $nA:VB::pm:pT$; ma $An = pm$; dunque $VB = pT$, ovvero $Vb = PT$; basta dunque condurre la VT, che parallela alla MPN vada a incontrare in T l' ascissa PA prolungata, ed allora la congiunta TM sarà la tangente cercata.

Corollario.

49. Dal carattere della curva AN si può facilmente venire in cognizione dell' altra AM; poiche se la prima sarà una Parabola, la seconda sarà un' Iperbole; e se la prima sarà un Cerchio, il di cui diametro AP, la seconda sarà una Parabola &c.

Esempio XVI.

50. Sia la Curva MN (*Fig.* 14.) una Logaritmica, o Logistica ordinaria, a cui dall' asse AP suppongansi tirate, oltre alle due infinitamente prossime PM, pm, altre due applicate pure infinitamente prossime QN, qn. Per la natura di questa Curva, in cui le porzioni dell' ascissa vanno in progressione aritmetica, mentre l'applicate vanno in progressione geometrica, dovrà esser sempre $Pp = Qq$; in oltre, supposto,

posto, che siano condotte le tangenti MT, Nr, vi sono le analogie PM : *pm* :: PT : *p*T ; QN : *qn* :: Q*r* : *qr* ; ma per la detta proprietà della Curva abbiamo PM : *pm* :: QN : *qn* ; dunque PT : *p*T :: Q*r* : *qr* ; e convertendo, e permutando, si avrà finalmente P*p* : Q*q* :: PT : Q*r* ; ma P*p* = Q*q* ; dunque PT = Q*r* ; cioè nella Logistica ordinaria la sottangente è da pertutto l' istessa.

E S E M P I O XVII.

51. Sia la Logistica spirale PBFA (*Fig.* 15.) cioè di tal natura, che divisa la periferia circolare PIC in parti eguali PG, GH, HI &c., e tirati dal centro A i raggj AP, AG, AH, AI &c. sia sempre PA : BA :: BA : DA :: DA : EA &c. supposti i detti raggj infinitamente prossimi, siccome le porzioni infinitesime PB, BD divengono tante rette, vi saranno due triangoli PAB, ABD, che avranno per le cose dette due lati proporzionali a due lati, e un angolo eguale ad un angolo, giacche per l' eguaglianza delle PG, GH &c. gli angoli al centro PAB, BAD sono eguali ; onde il triangolo PBA sarà simile al triangolo BAD, e così sempre. Dal centro A cogl' intervalli AB, AD descrivansi ora gli archetti B*p*, D*q* ; questi saranno perpendicolari alle AP, AB, e però i triangoletti BP*p*, B*q*D saranno simili ; e così sempre ; vi sarà dunque ancor sempre l' analogia costante P*p* : *p*B :: B*q* : *q*D ; ma questa esprime il rapporto dell' ascissa AP alla sottangente AT, o dell' ascissa AF alla sottangente A*r* ; dunque nella Logistica spirale il rapporto dell' ascissa alla sottangente è in ragione costante.

Sco-

SCOLIO.

52. Chi voleſſe trovare il valore della ſunnormale **PS** (*Fig.6.7.*) la quale giace tra l' applicata PM, e la normale SM, oſſervi, che vi è ſempre l' analogia Mo : *om*(*Fig.6.*), ovvero *m o*:*o*M (*Fig.7.*) :: PM:PS; onde trovato il rapporto della prima ragione con l' eſpoſto metodo; ſi verrà in cognizione della ſunnormale ricercata.

CA-

CAPITOLO SECONDO

Del rapporto degli Spazj curvilinei.

PROPOSIZIONE II.

53. *Siano le figure* AMNQ, amnq (*Fig.* 16. 17.) *di tal natura, che divise le loro altezze* AQ, aq *proporzionalmente in* P, p, *l' applicate* PM, pm *parallele alle basi* QN, qn *siano fra loro eguali; dico, che tali figure staranno come le loro altezze* AQ, aq.

Imperciocchè compiti i parallelogrammi AQNB, *aqnb*, e da' punti M, *m* tirate le MC, *mc* parallele alle AP, *ap*, si avrà per la costruzione AB $=$ *ab*, AC $=$ *ac*, e nelle figure AMNB, *amnb*, l' applicate CM, *cm*, BN, *bn* ad eguali altezze AC, *ac*, AB, *ab* saranno proporzionali; dunque per essere in egual numero di quantità continuamente proporzionali una delle antecedenti ad una delle antecedenti, come tutte a tutte, la figura AMNB starà alla figura *amnb*, come la BN alla *bn*, o come la AQ, alla *aq*; ma i parallelogrammi AQNB, *aqnb* a causa dell' eguali basi QN, *qn*, stanno anch' essi come l' altezze AQ, *aq*; dunque ancora le rimanenti figure AMNQ, *amnq* staranno fra loro come l' altezze AQ, *aq*; il che &c.

Co-

COROLLARIO.

54. Dunque benche le figure AVMNT, *aumnt* (*Fig*. 18. 19.) fiano tra gli afintoti AC, AQ, *ac*, *aq*, fe all' afciffe AQ, *aq*, tagliate proporzionalmente ne' punti P, *p*, Q, *q*, fiano applicate le PM, *pm* eguali, ed eguali le QN, *qn*, l'aree AVMNQ, *aumnq*, per trovarfi nell' ifteffe circoftanze delle due antecedenti figure, ftaranno come le AQ, *aq*, vale a dire, come l' afciffe; e fe l' afciffe AB, *ab*, come pure le AC, *ac* fiano eguali, e proporzionali l'applicate BN, *bn*, CM, *cm*, l'aree ATNMC *atnmc* ftaranno come le MC, *mc*; vale a dire come l' applicate.

PROPOSIZIONE III.

55. *Le figure congeneri* AVMNQ, aumnq (*Fig*. 16. 17. 18. 19.), *nelle quali l'applicate* PM, pm *fono in qualunque ragione moltiplicata, o fummoltiplicata, tanto diretta, che inverfa, dell' afciffe* AP, ap, *ftanno fra loro generalmente in ragion compofta dell' afciffe, e dell' applicate*.

Siano ineguali l' afciffe AP, *ap*, AQ, *aq*, ma l' applicate PM, *pm* fiano eguali, ed eguali fiano le QN, *qn*, è manifefto per la fuppofta natura di tali figure, che l' afciffe AQ, *aq* faranno tagliate proporzionalmente in P, *p*, e in Q, *q*; perche ftando $\overline{PM}^{\pm r} : \overline{QN}^{\pm r} :: AP : AQ$; e $\overline{pm}^{\pm r} : \overline{qn}^{\pm r} :: ap : aq$, farà AP : *ap* :: AQ : *aq*; onde (per l'antecedente, e fuo Corollario) l' aree AVMNQ, *aumnq* ftaranno come le AQ, *aq*; vale

vale a dire, quando nelle figure in queſtione l'aſciſſe ſono ineguali, ed eguali l'applicate, l'aree ſtanno come l'aſciſſe.

Siano ora in dette figure eguali l'aſciſſe AP, *ap*, AQ, *aq*; ed ineguali l'applicate PM, *pm*, QN, *qn*; è manifeſto per la natura di tali figure, che le PM, QN, *pm*, *qn* ſaranno proporzionali, e che in conſeguenza tanto l'applicate della prima, quanto l'equinumeriche della ſeconda congenere figura ſono in progreſſione geometrica continua, onde l'aree AVMNQ, *aumnq*, ſtaranno come le QN, *qn*, vale a dire, quando nelle figure in queſtione l'aſciſſe ſono eguali, ed ineguali l'applicate, l'aree ſtanno come l'applicate.

Dunque fatte ineguali tanto l'aſciſſe, che l'applicate, l'aree ſuddette ſtaranno in ragion compoſta dell'aſciſſe, e dell'applicate; onde tutte le figure, nelle quali le potenze dell'applicate ſono direttamente, o inverſamente proporzionali all'aſciſſe, ſtanno come i prodotti dell'aſciſſe nell'applicate corriſpondenti; il che &c.

Corollario I.

56. Se vi foſſero due equazioni $\overline{AP}^2 = \overline{PM}^3$, $\overline{ap}^2 = \overline{pm}^3$, le Curve, alle quali competono tali proprietà, e che ſono della famiglia delle Parabole, entrano anch'eſſe nel numero delle figure in queſtione, perche potendoſi tali equazioni cangiare in queſt'altre $AP = \overline{PM}^{\frac{3}{2}}$, $ap = \overline{pm}^{\frac{3}{2}}$, vedeſi, che le potenze dell'applicate ſono proporzionali all'aſciſſe, e però le loro aree ſtanno come i prodotti dell'applicate

nell' ascisse. Il medesimo dicasi di due equazioni generali

$$\overline{AP}^{n} = \overline{PM}^{\pm r}, \ \overline{ap}^{n} = \overline{pm}^{\pm r}.$$

COROLLARIO II.

57. Quanto si è detto risguardo a due figure congeneri, è facilmente conoscibile, che può applicarsi alla medesima figura, purche possegga anch' essa gli esposti caratteri; imperciocche se l'area AVMP stà all'area *aump*, come $AP \times PM : ap \times pm$; e se l'area AVMNQ stà all'area *aump*, come $AQ \times QN : ap \times pm$; anche l'area AVMP starà all'area AVMNQ, come $AP \times PM : AQ \times QN$; onde supposto per maggior brevità, che il carattere di tutte le Curve in questione sia generalmente $AP = \overline{PM}^{n}$ (intendendo per n un numero qualunque intero, o rotto, positivo, o negativo), il prodotto $AP \times PM$ starà generalmente come $\overline{PM}^{n+1}$; sicche l'area APM di qualunque Curva in questione starà anch'essa generalmente come $\overline{PM}^{n+1}$; ovvero (giacche è $\overline{AP}^{\frac{1}{n}} = PM$) come $\overline{AP}^{\frac{n+1}{n}}$; qual segno positivo risguarda le Parabole, ma quando n ha il segno negativo, l'espressione è per l'Iperbole tra gli asintoti, e allora l'area APM stà come $\overline{AP}^{\frac{n-1}{n}}$, perche dividendo $-n+1$ per $-n$, il quoto è $\frac{n-1}{n}$.

PRO-

PROPOSIZIONE IV.

58. *Posto, che una Curva sia reciproca d'un' altra, vale a dire, che abbia l'ordinate reciproche all' ordinate d' un' altra Curva, trovare il rapporto de' suoi Spazj curvilinei.*

Sia la Curva VSE (*Fig.*20.) reciproca alla Curva AMB, cioè che abbia l'applicate PS, CE reciproche all'applicate corrispondenti PM, CB; ed alla SPM tirinsi l'infinitamente prossima *spm*; siccome l'area infinitesima PS*sp* non differisce sensibilmente dal rettangolo SP*p*, sarà questo rettangolo l'elemento dell'intero spazio curvilineo AVSEC; ma la SP è per l'ipotesi inversamente proporzionale alla PM, cioè stà come $\frac{1}{PM}$; dunque lo spazio elementare PS*sp* starà come $\frac{Pp}{PM}$; onde se dalle circostanze, o sia dalla natura della Curva AMB si potrà avere la somma della formula $\frac{Pp}{PM}$, come apparirà dagli Esempj in appresso, si avrà il rapporto degli spazj curvilinei, che riempiono l'area AVEC; il che &c..

COROLLARIO I.

59. Con l'istesso metodo si può indagare la relazione dell'aree AVSP, AVEC, quando l'applicate PS, CE non sono addirittura reciproche alle applicate PM, CB, ma a due altre indeterminate, che abbiano a queste un rapporto regolare.

COROLLARIO II.

60. E' poi evidente, che in vece della Curva AMB reciproca alla VSE può pigliarfi qualunque altra Curva ad essa AMB non reciproca, purche fostituito alla Pp il valore della Mo, e paragonate l' areole elementari fotto l' efpreffione di $Mo \times PS$, fi poffa, fatte le loro fomme, avere in termini cogniti il rapporto dell' aree intere APS, AEC, come meglio apparirà dagli Efempj, che fi addurranno.

ESEMPIO I.

61. Se la Curva AMB (*Fig.*20.) è una Parabola quadratica, o Apolloniana, la fua reciproca VSE farà un' Iperbole cubica, in cui è $\overline{PS}^2 : \overline{CE}^2 :: AC : AP$; onde tirata la RM normale alla Curva Parabolica nel punto M, e da questo condotta la Mo parallela all' affe AP; per effer fimili i triangoli Mom, MPR, fi avrà l' analogia $Mo : om :: MP : PR$, onde farà $\frac{Mo}{MP}$, ovvero $\frac{Pp}{MP} = \frac{om}{PR}$; e in confeguenza lo fpazio AVSP farà come la fomma di tutte le $\frac{om}{PR}$; ma nella Parabola quadratica la funnormale RP è fempre una quantità coftante, effendo, come dalle cofe dette (52.) può ricavarfi, eguale alla metà del parametro; dunque la fomma di tutte le $\frac{om}{PR}$ ftarà come la pm, ovvero come la PM, e per-

ciò

ciò l'area AVSP ſtarà anch' eſſa come la PM; vale a dire che l'aree iperbolico-cubico-aſintotiche ſtanno come le corriſpondenti ordinate alla Parabola quadratica, ovvero ſono in ragion ſudduplicata delle proprie corriſpondenti aſciſſe.

E S E M P I O II.

62. Se la Curva AMB (*Fig.* 21.) è un ſemicerchio, l'area AVSP della ſua Curva reciproca VSET tra gli aſintoti AV, BT ſtarà come l'arco circolare corriſpondente AM; imperciocchè tirata dal centro C la CM, per la ſimilitudine de' triangoli Mom, MPC, ſarà Mo : Mm :: PM : MC; onde $\frac{Mo}{PM} = \frac{Mm}{MC}$; ſicche lo ſpazio curvilineo AVSP ſtarà come tutte le $\frac{Mm}{MC}$ per tutto il tratto dell' arco AM; ma il raggio CM è coſtante; dunque la ſomma di tutte le dette $\frac{Mm}{MC}$ ſtanno come l' arco AM; e in conſeguenza l' area AVSP è proporzionale al corriſpondente arco AM; ſicche l'area AVSP a tutta l' area AVETB ſtarà come l' arco AM alla ſemiperiferia circolare ADB.

E S E M P I O III.

63. Se la figura aſintotica AVSC (*Fig.* 22.) ſia tale, che ogni ſua applicata PS ſia reciproca alla corriſpondente EA quarta proporzionale dopo l'aſciſſa CP, l' applicata PM, ed il diametro CA del ſemicerchio AMC, l' area aſintotica

AVSP

AVSP starà come il settore CMA; imperciocchè tirata alla MPS l' infinitamente prossima *mps*, e dal centro F, come ancora da' punti A, C condotte a' punti M, *m* le FM, AM, CM, C*m*, indi abbassate le perpendicolari M*o*, *mn*, per esser la PS reciproca alla $AE = \frac{PM \times CA}{CP}$ per la costruzione, l' areola SP*ps* starà come $\frac{Pp \times CP}{PM}$. Essendo poi simili i triangoli FMP, M*mo*, sarà $FM : MP :: Mm : Mo = Pp = \frac{MP \times Mm}{FM}$; onde $\frac{Pp \times CP}{PM}$ starà come $CP \times Mm$.

In oltre a causa de' triangoli simili CPM, M*nm*, sarà $CP : CM :: mn : Mm = \frac{CM \times mn}{CP}$; onde fatta la sostituzione, $CP \times Mm$ starà come $CM \times mn$, ovvero come $Cm \times mn$; vale a dire l' areola SP*ps* è proporzionale al rettangolo C*mn*, ovvero al triangolo C*nm* suddupło di esso; onde tutta l' area AVSP sarà proporzionale al Settore circolare corrispondente AMC.

Corollario I.

64. Il Settore AMC come eguale al Settore AMF, ed al triangolo FMC, è eguale all' arco AM nella metà del raggio FC, e alla semiordinata PM nella metà del medesimo raggio FC, cioè $= (AM + PM) \times \frac{1}{2} FC$; dunque tolta la costante $\frac{1}{2}$FC, l' area AVSP sarà proporzionale alla

la somma dell' arco AM, e dell' applicata PM; ma tal somma forma, come è notissimo, le semiordinate della Cicloide; dunque l' aree asintotiche della figura AVSC staranno come le corrispondenti semiordinate della Cicloide.

COROLLARIO II.

65. Se si fa la comparazione di questa figura asintotica AVSC con la Versiera Grandiana (29.), si vedrà, che sono congeneri, o sia dell' istessa natura, onde l' aree asintotiche della Versiera saranno proporzionali all' ordinate della Cicloide.

ESEMPIO IV.

66. Sia AMB (*Fig.*23.) una Logistica ordinaria, il di cui asintoto DN. Dal punto A conducasi parallela alla DN la AP, che prolunghisi indefinitamente da ambe le parti, e tirata all' applicata NMP, l' infinitamente prossima *nmp*, come ancora la tangente *r*MT, che incontri ne' punti *r*, T le DN, PA prolungate, da i punti M, *m* si abbassino le perpendicolari M*s*, *ms*.

Per l' analogia MN : N*r* :: *ms* : *s*M, sarà $sM = \frac{ms \times Nr}{MN}$;

onde l' areola elementare *m*MN*n*, che non differisce sensibilmente dal rettangolo *s*MN, starà come $ms \times Nr$, cioè per essere la N*r* costante (50.), come la *ms*; sicchè se gl' incrementi dell' applicate vengono da A verso P, tutta l' area ADNM starà come l' applicata PM; o sia come la AE, vale a dire, come la differenza delle due applicate AD, MN

com-

comprendenti la detta area ADNM. Ma se i detti incrementi dell' applicate vengono da B verso N, cioè se in vece della *ms* si consideri l' eguale Mi, tutta l' area asintotica MBN starà come l' applicata MN.

E S E M P I O V.

67. Sia DN (*Fig.* 24.) un' Iperbole ordinaria tra gli asintoti VC, CA, e la CA serva d' applicata alla Logistica AMB, il di cui asse sia la VC prolungata indefinitamente verso O; indi estesa l' applicata iperbolica NP fino alla Logistica in M, e condotta ad essa l' infinitamente prossima *npm*, tirinsi dal punto M la tangente MO, e la MS parallela alla AC.

Giacche l' areola elementare iperbolica PN*np* non differisce sensibilmente dal rettangolo $PN \times Pp$, ovvero $PN \times Ms$, e giacche per i triangoli simili OSM, *ms*M, è la $Ms = \frac{SM \times sm}{SO} = \frac{PC \times sm}{SO}$, la detta areola starà come $\frac{sm \times PC \times PN}{SO}$; ma per la natura della detta Iperbole il rettangolo $PC \times PN$ è sempre costante, come pur costante è la sottangente SO della Logistica (50.); dunque l' areola PN*np* starà come la *sm*, e in conseguenza tutta l' area iperbolica ADNP starà come l' intera applicata corrispondente PM della Logistica; dove vedesi, che si è presa l' area ADNP, e non l' area CVNP, perche gl' incrementi *ms* dell' applicate PM vengono da A verso P, e non viceversa.

Co-

Corollario I.

68. Per essere pnDA:PNDA::pm:PM, dividendo, sarà pnNP:pnDA::ms:mp::FS:FC; ma per la proprietà della Logistica le parti dell' asse corrispondono all' applicate, come i logaritmi a' numeri; dunque le FS, FC, ovvero l' aree pnNP, pnDA corrisponderanno all' applicate SM, CA, ovvero alle CP, CA, come i logaritmi a' numeri. Sicche con le Tavole de' Logaritmi iperbolici si può avere il rapporto di due trapezj iperbolici dati pnNP, pnDA; imperciocche presa la Cp per l' unità, e trovati in numeri i valori delle rette CP, CA, i loro logaritmi rappresenteranno gli spazj iperbolici pnNP, pnDA.

Corollario II.

69. Giacche, come si è detto, nella Logistica le parti dell' asse corrispondono all' applicate, come i logaritmi a' numeri, e perciò le ragioni tra l' applicate crescono come l' ascisse tra esse applicate intercette; ne verrà, che la CS alla CF, ovvero la PM alla pm, starà come la ragione, che passa tra le due AC, MS, o sia tra le due AC, PC, alla ragione, che passa tra le due AC, mF, ovvero tra le due AC, pc; ma le PM, pm, si è dimostrato, che stanno come l' aree iperboliche ADNP, ADnp, e le due AC, CP stanno per la natura dell' Iperbole, come le due PN, AD, come ancora le due AC, Cp stanno come le due pn, AD; dunque l' aree iperboliche ADNP, ADnp staranno come le

ragioni, che paſſano tra le due AD, PN, e le due AD, *pn*; vale a dire due aree iperboliche racchiuſe dall' applicate, dall' aſciſſa, e dalla curva, ſtanno come le ragioni dell' applicate, che le racchiudono; qual verità fu prima d' ogni altro per via diverſa dimoſtrata con ſommo applauſo dal Padre Gregorio da S. Vincenzo, celebre Geometra dello ſcorſo ſecolo, e lume chiariſſimo dell' inclita Compagnia di Gesù. Si può per altro rendere il Problema anche più generale, conſiderando due iperboli di potenza diverſa, e trovando nella ſeconda di queſte un' area, che ſtia ad un' area aſſegnata nella prima in una data ragione.

COROLLARIO III.

70. Dall' eſſer l'aree iperboliche come le ragioni dell' applicate, che le racchiudono, ſi deduce nuovamente ciò, che nel Corollario primo (68.) ſi è dimoſtrato; imperciocchè ſia una iperbole equilatera MNOD (*Fig.* 35.) tra gli aſintoti CA, CB, il di cui centro C, ed il di cui ſemiaſſe traſverſo CM. Nell' aſintoto CB prendanſi le CP, CQ, CR, CB, che ſiano in progreſſione geometrica continua, e da' punti P, Q, R, B tirinſi alla curva le PM, QN, RO, BD parallele all' altro aſintoto CA; è chiaro, che per eſſere ancora l' applicate PM, QN, RO, BD in progreſſione geometrica continua, l' aree iperboliche PMNQ, QNOR, RODB saranno eguali; onde le loro ſomme, cioè *o*, PMNQ, PMOR, PMDB ſaranno in una progreſſione aritmetica continua. Dunque ſe la CP ſi fiſſi per l' unità, e le rette CQ, CR, CB ſi piglino come numeri, i logaritmi di tali numeri ſaranno

o, PMNQ

o, PMNQ, PMOR, PMDB; trovati dunque nelle Tavole de' Logaritmi iperbolici i Logaritmi corrifpondenti a' numeri delle parti eguali, che formano le grandezze CQ, CR, CB, effi rapprefenteranno, come di fopra fi diffe (68.), le menzionate aree iperboliche.

S c o l i o I.

71. Il prefente Efempio (67.) può dimoftrarfi con più precifione anche in queſta maniera. Per effer fimili i triangoli MSO, M*sm* (*Fig.*24.), fi avrà $ms = \frac{Mr \times SO}{SM} = \frac{Pp \times SO}{CP}$; fe dunque fi fupponga, che la curva DN fia un' Iperbole ordinaria tra gli afintoti VC, CA, ftarà *ms* come $PN \times Pp \times SO$; quando dunque la fottangente SO fia coftante, l'areola NP*pn* ftarà come *ms*; ma fuori della Logiftica comune non vi è curva, che abbia la fottangente coftante; dunque l'intero fpazio iperbolico afintotico ADNP ftarà come la PM, o fia come l'applicata della detta Logiftica, prefa parallelamente all'afintoto CO.

C o r o l l a r i o IV.

72. Fatto centro C (*Fig.*25.) (che è il centro dell' Iperbole DN tra gli afintoti VC, CL) con l' intervallo AC (che è una porzione a piacere dell' afintoto VC) defcrivafi il quadrante ABC, e divifane la periferia in parti eguali AQ, Q*q* &c., indi condotti i raggj QC, *q*C &c., taglinfi da quefti le porzioni continuamente proporzionali CM, C*m* &c., la curva AM*m*O, che paffa per quefti punti, chiamafi, come è

noto, Logiſtica ſpirale; ora è chiaro, che gli archi AQ, Aq ſono i logaritmi de' numeri eſpreſſi dall'applicate CM, Cm; ſicche con gl'intervalli CM, Cm, &c. deſcritti gli archi MP, mp &c.; verrà la AC diviſa ne' punti P, p &c. in porzioni continuamente proporzionali; quindi i trapezj iperbolici ADNP, PNnp ſaranno eguali, perche eguali ſono le ragioni dell' applicate AD, PN pn, che li racchiudono (69.), e però ſtarà il primo al ſecondo come AQ : Qq, e così ſempre; onde preſi gli egualmente moltiplici degli antecedenti, e de' conſeguenti, ſtarà qualunque arco AQ, all'arco Aq, come il trapezio ADNP, al trapezio ADnp; e l'arco qQ all'arco qA, come il trapezio pnNP al trapezio pnDA; che ſe ſi congiungeranno le DC, NC, nC; ſiccome i trapezj ADNP, PNnp eguagliano i ſettori DCN, NCn (come ravviſaſi, togliendo dagli eguali triangoli DAC, NPC, che ſono le metà degli eguali rettangoli DAC, NPC, il comune EPC, e aggiungendo NDE), gli archi AQ, Aq, ovvero i ſettori circolari ACQ, ACq, che ſtanno come i trapezj ADNP, ADnp, ſtaranno ancora come i ſettori iperbolici DCN, DCn. Si potrà dunque per mezzo della Logiſtica ſpirale aſſegnare co' logaritmi iperbolici il rapporto di due incogniti archi di cerchio, e in conſeguenza di due ſettori, o di due angoli pure incogniti.

S C O L I O II.

73. Alle volte ſi può venire in cognizione, che gli ſpazj d'una curva ſtiano direttamente, o inverſamente come le potenze dell'applicate d'un'altra curva; in tal caſo ſe abbiſognaſſe ridurre il rapporto de' detti ſpazj curvilinei a ſole applicate d'una curva, ſi può eſeguir ciò con un facil metodo eſpoſto nella ſeguente

PRO-

PROPOSIZIONE V.

74. *Costruire una figura, le di cui applicate siano direttamente, o inversamente proporzionali all' applicate d' un' altra data figura elevate a qualunque potenza.*

N. 1. Sia AQSR la data figura (*Fig.*26.27.), le di cui applicate PR, QS. Ergasi sulla AP dal punto A la perpendicolare AO indefinita verso O, e intorno ad essa come asse descrivasi una Parabola AB, la di cui natura generale sia

$\overline{AL}^n : \overline{AO}^n$ :: LB : OD, con questa avvertenza, che se n (per cui intendo un numero positivo qualunque intero, o rotto) sarà maggiore dell' unità, la detta Parabola AB deve rivolgere all' asse AO la convessità, e viceversa la concavità, se n è minore dell' unità; e da' punti R, S tirinsi le RB, SD parallele all' asse AP, che tocchino co' punti estremi B, D la detta Curva AB.

Per esser PR = AL, QS = AO, si avrà $\overline{PR}^n : \overline{QS}^n$ :: LB : OD; onde prolungate le RP, SQ, e fatta PE = LB, QG = OD, e così sempre, ne nascerà una nuova figura AQGE, le di cui applicate staranno come le potenze delle corrispondenti PR, QS.

N. 2. Sia ora ACSQ (*Fig.*61.62.) la data figura, le di cui applicate PR, QS. Da' punti R, S tirate indefinitamente le SD, RB parallele all' asse AP, intorno alla AO eretta normalmente in A alla AP, e considerata come asse, descrivasi un' Iperbole DB tra gli asintoti AV, AL, la di

cui

cui natura generale venga espressa dall' equazione $\overline{AO}^{-n}:\overline{AL}^{-n}::$ OD:LB.

Essendo QS$=$AO, PR$=$AL, avremo $\overline{QS}^{-n}:\overline{PR}^{-n}::$OD :LB; onde prodotte le SQ, RP, e fatta QG$=$OD, PE$=$ LB, e così da per tutto, ne risulterà una nuova figura AEGQ, le di cui applicate PE, QG saranno inversamente proporzionali alle potenze delle corrispondenti applicate PR, QS.

Con che si è soddisfatto a quanto si era proposto.

Corollario I.

75. Se la data figura ARSH (*Fig.* 28.) sarà una curva ritornante in se stessa, è chiaro anche con la sola ispezione, che la figura da ritrovarsi deve avere un regresso, o flesso contrario. Così se ARSH sarà un cerchio, il di cui centro Q, le PE eguali alle BL cresceranno fintanto, che la QG eguagli la massima DO; indi tutte le *pe* eguali alle *bl* anderanno decrescendo talmente, che l'area QGH sarà eguale, e simile all' area QGA, il che accaderà sempre quando la figura ASH senza regressi sarà divisibile in due parti eguali, e simili ASQ, HSQ, come è evidente.

Corollario II.

76. E' facile il rintracciar la natura della figura AQGE (*Fig.* 26. 27), poiche fatto $=1$ il parametro della Parabola AB, sarà sempre QG$=\overline{QS}^{n}$. Così se la data figura ASQ (*Fig.* 26.)

(*Fig.* 26.) è una Parabola qualunque, in cui le potenze dell' applicate ſiano proporzionali all' aſciſſe, la richieſta figura AEGQ ſarà ſempre un triangolo. Parimente ſe la data figura AQSR (*Fig.* 27.) è un' Iperbole qualunque tra gli aſintoti, in cui le potenze dell' applicate ſiano reciproche all' aſciſſe, la richieſta figura AQGE ſarà ſempre un' Iperbole ordinaria tra gli aſintoti, il che non ha biſogno di prova. Eſſendo poi PE $=$ LB (*Fig.* 61. 62.), e l' equazione alla Curva DB eſſendo $\overline{AL}^{=n} = LB$, l' altra equazione alla figura AEGQ ſarà $PE = \overline{PR}^{=n}$, onde ſoſtituito l' equivalente di $\overline{PR}^{=n}$ in termini di AP, ſarà facile il conoſcere la natura della figura AEGQ. Così ſe la figura ACSQ (*Fig.* 62.) ſarà un' Iperbole tra gli aſintoti, le di cui aſciſſe ſiano reciproche alle potenze dell' applicate, la figura AGQ ſarà ſempre un Triangolo.

COROLLARIO III.

77. Con l' iſteſſo metodo, e con un ordine inverſo di figure, è chiaro, che ſi può coſtruire una figura di tali applicate, che le loro potenze ſtiano direttamente, o inverſamente come l' applicate d' un' altra figura.

CA-

CAPITOLO TERZO

Della quadratura degli Spazj curvilinei.

PROPOSIZIONE VI.

78. IN *qualunque Figura* ADN (*Fig.* 24. 29. 30. 31. 32. 33.), *il di cui asse sia* AP, *e i due spazj curvilinei* ADNP, ADnp *siano proporzionali alle corrispondenti semiordinate* PM, pm *della Curva* AMB, *che abbia l'asse* AP *comune con detta figura* ADNP, *lo spazio curvilineo* ADNP *è eguale al rettangolo della semiordinata* NP *nella sottangente* PT.

N. 1. Suppongansi le MN, *mn* infinitamente prossime, e dal punto M tirinsi la M*s* parallela alla AP, e la tangente MT, che seghi in T l'asse AP.

Stando per l'ipotesi lo spazio curvilineo ADNP, come la PM, anche l'areola elementare N*np*P, ovvero il rettangolo NP*p* starà come la retta elementare *ms*; si avrà dunque l'analogia $ms:Pp::PN:1$; sicche sarà $1 \times ms = NPp$, cioè una quantità costante moltiplicata nella porzione elementare *ms* eguaglierà l'elemento N*np*P dell'area ADNP, e in conseguenza una quantità costante moltiplicata nell'intera *pm*, o PM,

o MP, eguaglierà tutta l'area ADNP; ma $ms:Pp$, ovvero $ms:sM$ :: MP : PT :: PN : 1; e perciò $1 \times MP = PT \times PN$; dunque l'area ADNP, che è eguale al prodotto $1 \times MP$, sarà ancora eguale all'altro prodotto $PT \times PN$; il che &c.

In altra maniera.

N. 2. Siccome lo spazio $ADnp$, stà allo spazio ADNP, come $pm:PM$ per l'ipotesi; dividendo, starà lo spazietto $PNnp$, allo spazio ADNP, come $sm:PM$, ovvero come $Pp:PT$; dunque moltiplicando gli ultimi due termini per PN, e permutando starà il piccol rettangolo $PNnp$ al rettangolo $Pp \times PN$, come l'area ADNP al rettangolo $PT \times PN$; ma i primi due termini sono eguali; dunque eguali saranno ancora i secondi, cioè l'area ADNP sarà eguale al rettangolo $PT \times PN$; il che &c.

Corollario I.

79. Prolungata qualunque VC parallela alla semiordinata PN finche incontri in O la tangente TM anch' essa prolungata, indi condotta la NE parallela alla AP, siccome si è detto, che il rettangolo NPp stà allo spazio curvilineo NDAP, come $sm:PM$; sarà ancora, prese le egualmente moltiplici degli antecedenti, il rettangolo iscritto PNE allo spazio NDAP, come SO : PM, perche stà il rettangolo PNE al rettangolo NPp :: SM : Ms :: ms : SO; il che sia detto riguardo alle *Figure* 24. 29. 30. 31.; nell'altre poi 32. 33. è evidente, che il rettangolo iscritto PNE stà allo spazio NDAP

 come

come PA:PT, cioè come l'asciffa alla fottangente. Ma nelle *Figure* 24. 29. 30. prolungata la tangente MT fino all' incontro nel punto R dell' asciffa AQ anch' essa bastantemente estesa, per essere AP$\times$PN:TP$\times$PN::AP:TP::RM:TM ::RQ:AQ, ne verrà, che lo spazio curvilineo ADNP starà al rettangolo circoscritto, come AQ:RQ, cioè nuovamente come l'asciffa alla fottangente prese dalla parte concava della curva AM.

COROLLARIO II.

80. Per avere nelle *Figure* 24. 29. 30. il valore della PT, si osservi, che per i triangoli simili RQM, TPM vi è l'analogia RQ:PM::QM:PT, ovvero RQ:AQ::AP:PT; onde PT $= \frac{AQ \times QM}{RQ}$ si troverà facilmente, conosciuta la natura della curva AMB, e in conseguenza la sua fottangente RQ (17.).

COROLLARIO III.

81. Quando dunque sia noto, che qualunque curva DN abbia l' aree ADNP proporzionali alle corrispondenti applicate PM della curva AM, intorno al medesimo asse AP, si potrà di dette aree ADNP ottener sempre la quadratura.

Co-

COROLLARIO IV.

82. Può darſi, che le due curve in queſtione coincidano; ex. gr. ſe la curva AM (*Fig.* 23.) foſſe tale, che lo ſpazio eſteriore ADNM ſtaſſe come la ſemiordinata MP dello ſpazio interiore, la dimoſtrazione è ſempre l' iſteſſa, perche eſſendo qui ancora MN $\times$ N*n*: ADNM : : *sm*: PM : : *s*M: PT, moltiplicando per MN li due ultimi termini, ſe ne ricava, eſſere PT $\times$ MN $=$ ADNM.

COROLLARIO V.

83. Che ſe poi la curva AM foſſe di tal natura, che aveſſe l' area aſintotica, o indefinita MBN proporzionale alla ſemiordinata MN, allora ravviſaſi ocularmente, che la quadratura dello ſpazio aſintotico MBN eguaglia il rettangolo della ſua ſottangente N*t* nella ſua ſemiordinata MN.

SCOLIO.

84. Oſſervisi, che ſe ſtando fiſſa la figura AMP (*Fig.* 24. 29. 30. 31. 32. 33.), l' applicate dell' altra figura ADNP andaſſero creſcendo con ordine contrario a quello, in cui ſi eſpongono delineate, ovvero ſe amendue le Curve AM, DN, partendo dall' iſteſſo vertice rivolgeſſero la loro concavità all' aſſe comune AP, non ſi potrebbe più avverare, che l' area ADNP eguagli il rettangolo TPN, perche queſto riuſcirebbe viſibilmente, o maggiore, o minore di eſſa; onde è,

che dall' addotte figure si può unicamente ricavare tal verità, e da esse può riconoscersi, qual contegno debbasi usare quando l' area curvilinea, che imprendesi a quadrare, rivolga la convessità, o la concavità all' asse.

ESEMPIO I.

85. Se la curva AN (*Fig.* 30.) è una Parabola Apolloniana, la curva AM sarà una Parabola cubica, perche volgendo essa Parabola AN la convessità all'asse AP, la sua area APN starà come $\overline{AP}^3$ (57.), e perciò $\overline{AP}^3$ starà come PM, cioè sarà $AQ = \overline{QM}^3$, che è il carattere della Parabola cubica; ma per essere in questa la sottangente $RQ = 3AQ$ (19.), è la $PT = \frac{1}{3}AP$ (80.); dunque sarà lo spazio Parabolico $APN = \frac{1}{3}AP \times PN$, cioè la terza parte del circoscritto rettangolo. Che se la Parabola Apolloniana AN (*Fig.* 29.) rivolgerà la concavità all' asse AP, la sua area ANP starà come $\overline{AP}^{\frac{3}{2}}$, che dovendo esser proporzionale all'applicata PM della curva AM, darà di tal curva l' equazione $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^3$, cioè sarà anch' essa del genere Parabolico; ma la di lei sottangente $PT = \frac{2}{3}AP$ (22.); dunque sarà lo spazio parabolico $ANP = \frac{2}{3}AP \times PN$, cioè due terzi del circoscritto rettangolo, come appunto dimostrò Archimede.

ESEM-

E S E M P I O II.

86. Se la curva AN (*Fig.*30.) è una Parabola cubica, la curva AM sarà una Parabola biquadratica; perche lo spazio APN starà come $\overline{AP}^4$ (57.), e però si avrà $AQ = \overline{QM}^4$; ma la sottangente RQ di questa è $= 4AQ$ (22.), e la $PT = \frac{1}{4}AP$ (80); dunque sarà lo spazio $APN = \frac{1}{4}AP \times PN$.

E S E M P I O III.

87. Sia compresa la curva AN (*Fig.*29.30.) nell' equazione generale a tutte le Parabole, Paraboloidi, e Curve agnate $\overline{AP}^n = PN$, intendendo per n qualunque numero affermativo intero, o rotto, la curva AM sarà sempre compresa nell' equazione generale $AQ = \overline{QM}^{n+1}$; ma questa generale espressione ha la sottangente $(n+1)RQ$ (22.), e in conseguenza è generalmente la $PT = \frac{1}{n+1}AP$ (80.); dunque la quadratura generale degli spazj Parabolici d' ogni genere sarà $\frac{1}{n+1}AP \times PN$; sicche se fosse $n = \frac{1}{2}$, la quadratura della Parabola, in cui $AP = \overline{PN}^2$, sarebbe $\frac{2}{3}AP \times PN$ come sopra (85.). Se $n = 4$, tal quadratura sarebbe $\frac{1}{5}AP \times PM$; dove conoscesi, che quando n significa un numero

mero intero, l' aree Paraboliche, le quali si quadrano, sono dalla parte convessa; e quando n esprime un rotto, sono dalla parte concava della curva; e ciò per le cose dette (22.). Che se l'equazione generale alla curva AN fosse $\overline{AP}^{n} = \overline{PN}^{m}$, l'area ANP starebbe come AP $\times$ PN, ovvero come $\overline{AP}^{\frac{m+n}{m}}$ (57.); onde l'equazione all'altra curva AM sarebbe PM $=$ $\overline{AP}^{\frac{m+n}{m}}$, ovvero AP $=$ $\overline{PM}^{\frac{m}{m+n}}$, la di cui sottangente PT $= \frac{m}{m+n}$ AP (22.); quindi la quadratura dell' area parabolica ANP sarà $\frac{m}{m+n}$ AP $\times$ PN.

COROLLARIO.

88. Stà dunque generalmente il rettangolo APN allo spazio APN (*Fig.* 29. 30.) di qualunque Parabola, o Paraboloide, come AP $\times$ PN : $\frac{1}{n+1}$ AP $\times$ PN, cioè come $1 : \frac{1}{n+1}$; il che si può dedurre ancora dalle cose dette (81.), perche la ragione di QR : AQ, che dà il ragguaglio del rettangolo APN allo spazio curvilineo ANP stà come $1 : \frac{1}{n+1}$.

ESEM-

E S E M P I O IV.

89. Se la curva D N *n* (*Fig.* 33.) è un' Iperbole cubica, la di cui equazione $AP = \overline{PN}^{-2}$, l'altra curva AM sarà una Parabola quadratica (61.); onde per essere TP doppia di AP (24.), sarà lo spazio asintotico $DAPN = 2\,AP \times PN$.

E S E M P I O V.

90. Se la curva D N *n* è un' Iperbole tra gli asintoti, la di cui equazione $AP = \frac{1}{\overline{PN}^3}$, la curva AM sarà una Parabola, la di cui equazione $\overline{AP}^2 = \overline{AM}^3$, perche stando l' area ADNP come $AP \times PN$ (53.), starà ancora come $\overline{AP}^{\frac{2}{3}}$ (57.); ma la sottangente di questa Parabola è $\frac{3}{2}\,AP$ (21.); dunque l' area iperbolico-asintotica $ADNP = \frac{3}{2}\,AP \times PN$.

E S E M P I O VI.

91. Se la curva D N (*Fig.* 34.) è un' Iperbole tra gli asintoti, la di cui equazione sia $\overline{AP}^2 = \frac{1}{PN}$, la curva corrispondente M B sarà un' Iperbole ordinaria tra gli asintoti, perche stando l' area ADNP come $\frac{1}{AP}$ (55. 57.), e la sottangente di quest' Iperbole essendo $-AP$ (23.), sarà l' area iper-

iperbolica ADNP $=-\mathrm{AP}\times\mathrm{PN}$; qual segno negativo fa per altro conoscere, che lo spazio quadrato non è altrimenti ADNP, ma lo spazio PCN preso dalla parte opposta; ed in fatti l'area ADNP all'area AD*np* non può mai stare come PM:*pm*, perche starebbe il più al meno, come il meno al più; il che è assurdo.

ESEMPIO VII.

92. Sia l'equazione generale $\mathrm{AP}=\overline{\mathrm{PN}}^{-n}$, intendendo per n un numero qualunque intero, o rotto, qual equazione comprenda nella curva DN (*Fig.* 33. 34.) tutte le Iperboli, e Iperboloidi tra gli asintoti; siccome la sua area stà generalmente come $\mathrm{AP}\times\mathrm{PN}$ (55.), cioè come $\overline{\mathrm{AP}}^{\frac{n-1}{n}}$ (57.), l'altra curva BM avrà l'equazione generale $\overline{\mathrm{AP}}^{n-1}=\overline{\mathrm{PM}}^{n}$, e perciò sarà del genere delle Parabole, se n è un numero intero maggiore dell'unità, e sarà del genere dell'Iperboli tra gli asintoti se n è un numero rotto minore dell'unità, per essere allora $n-1$ una quantità negativa.

Nel primo caso, posto cioè n per un numero intero, le sottangenti, che appartengono all'equazione $\overline{\mathrm{AP}}^{n-1}=\overline{\mathrm{PM}}^{n}$ (*Fig.* 33.) sono comprese nella formula $\frac{n}{n-1}\mathrm{AP}$ (22.); sicche la quadratura dello spazio ADNP sarà generalmente $\frac{n}{n-1}\mathrm{AP}\times\mathrm{PN}$.

Nel

Nel fecondo cafo facciafi $n - 1 = -r$, l'equazione alla curva MB (*Fig.* 34.) diverrà $\overline{AP}^{-r} = \overline{PM}^{n}$, ovvero $\overline{AP}^{r} = \overline{PM}^{-n}$, e la fottangente PT farà generalmente $-\frac{n}{r}$ AP (26.); quindi la quadratura dell'altra curva DN farà $-\frac{n}{r} AP \times PN$, qual valore col fegno negativo indica, che l'aree iperboliche quadrate non fono le ADNP, ma l'oppofte PCN; ma $-\frac{n}{r} = \frac{n}{-r} = \frac{n}{n-1}$; dunque la quadratura dell'aree iperboliche PCN farà generalmente $\frac{n}{n-1} AP \times PN$.

Dal che riconofcefi, che la quadratura generale di tutte quante l'Iperboli, e Iperboloidi DN (*Fig.* 33. 34.) ora dall'una, ed ora dall'altra parte degli afintoti, è $\frac{n}{n-1} AP \times PN$; e fe l'equazione generale di quefte curve foffe $\overline{AP}^{-n} = \overline{PN}^{m}$, la loro quadratura generale farebbe $\frac{m}{m-n} AP \times PN$. Così fe $m = 4$, $n = 3$, la quadratura dello fpazio ricercato farà $4 AP \times PN$, che per effere prodotto affermativo, denoterà l'area ADNP (*Fig.* 33.); fe $m = 3$, $n = 5$, la detta quadratura farà $-\frac{3}{2} AP \times PN$, che per effer prodotto negativo, indica effer quadrata l'area oppofta PCN (*Fig.* 34.); ma fe $m = 1$, $n = 1$, la detta quadratura farà $\frac{1}{0} AP \times PN$; il che fa conofcere, non poterfi ottenere la quadratura dell'area

ADNP (*Fig.* 33.), per essere il denominatore inassegnabile rispetto al numeratore.

E S E M P I O VIII.

93. Se la Curva DN*n* (*Fig.* 33.) è la reciproca del semicerchio AFH, della quale si è parlato superiormente (62.); siccome questa ha l'aree ADNP, AD*np* proporzionali agli archi circolari corrispondenti AF, AI, la curva AM sarà tale, che le sue semiordinate PM, *pm* saranno eguali agli archi circolari corrispondenti AF, AI, cioè sarà un'ungula cilindrica appianata; ma in questa curva la sottangente PT è (fatto *p* centro del cerchio) quarta proporzionale dopo il raggio, il seno retto, e l'arco corrispondente, cioè $= \frac{PF \times Arc.\,AF}{pF}$ (38.); dunque lo spazio curvilineo in questione ADNP $= \frac{PF \times PN \times Arc.\,AF}{pF}$.

COROLLARIO.

94. Se $pn = pI$, e sia al solito p centro del cerchio, siccome vi deve esser l'analogia $pI : PF :: PN : pn$, sarà PN $= \frac{pI \times pn}{PF} = \frac{\overline{pF}^2}{PF}$; onde $\frac{PF \times PN \times Arc.\,AF}{pF} = pF \times Ar.\,AF$; vale a dire l'area ADNP sarà in tal caso dupla del settore *p*AF, onde tutta l'area ADNH sarà dupla del semicerchio AFH.

ESEM-

ESEMPIO IX.

95. Se la curva DN*n* (*Fig.* 33.) è la Verſiera Grandiana (29.), l' altra curva AMB ſarà una cicloide ordinaria (64. 65.), la di cui ſottangente PT è quarta proporzionale dopo il ſeno retto, il ſeno verſo, e l' applicata cicloidale corriſpondente, cioè $PT = \frac{PA \times PM}{PF}$ (42. 43.); ma $PM = PF + Arc.\, AF$; dunque ſarà $PT = \frac{AP \times PF + AP \times Arc. AF}{PF}$, cioè quarta proporzionale dopo il ſeno retto, il ſeno verſo, e la ſomma del ſeno retto, e dell' arco corriſpondente; onde la quadratura dello ſpazio ADNP, cioè $PT \times PN$, ſarà $\frac{AP \times PF \times PN + AP \times PN \times Arc.\, AF}{PF}$.

COROLLARIO.

96. Se le ſemiordinate PN foſſero diſtribuite in maniera, che fatto *p* centro del cerchio AFH, la *pn* foſſe eguale alla corriſpondente *p*I, allora l' area AD*np* ſarebbe doppia del ſettore AFH, perche eſſendo in tal caſo $Ap = pI = pn$, l' addotta formula diverrebbe $\overline{Ap}^2 + Ap \times AFI$; onde per le coſe dette (63.) tutto lo ſpazio ADNH ſarà con tal condizione doppio del ſemicerchio AFH.

E S E M P I O X.

97. *N.* 1. Sia la curva AM (*Fig.* 23.) una Logiſtica; ſiccome le ſue aree ADNM, ADnm ſtanno fra loro come le corriſpondenti PM, pm (*66.*), ne verrà, che lo ſpazio ADNM eguaglierà il rettangolo della ſottangente PT nell' applicata NM; ma la ſottangente Nr della Logiſtica è una quantità coſtante (50.); dunque fatta queſta $= 1$, ſarà per i triangoli ſimili TPM, NrM, la $PT = \frac{PM}{MN}$, onde l' area ADNM $= PM \times 1 = PM \times Nr$, cioè ſarà eguale al rettangolo della ſottangente Nr nella differenza dell' applicate AD, MN, che tal' area ADNM racchiudono.

N. 2. Similmente ſiccome nella medeſima Logiſtica AMB il ſuo ſpazio aſintotico MBN ſtà come l' ordinata MN (*66.*), la ſua quadratura ſarà eguale al rettangolo della ſottangente Nr nell' applicata MN, come gia ſi diſſe (83.).

E S E M P I O XI.

98. Se la curva DN (*Fig.* 24.) è un' Iperbole Apolloniana, i di cui aſintoti VC, CA, la curva AMB ſarà una Logiſtica ordinaria (*67.* *71.*), onde la quadratura dello ſpazio iperbolico ADNP ſarà $PT \times PN$, cioè per eſſere $SO : SM(CP) :: PM : PT = \frac{CP \times PM}{SO}$, la detta quadratura ſarà $\frac{CP \times PM \times PN}{SO}$, da cui ricavaſi $SO : PM :: CP \times PN : ADNP$, cioè

cioè lo ſpazio ADNP ſarà quarto proporzionale dopo la ſottangente della Logiſtica, la parallela al di lei aſſe, e il rettangolo inſcritto nell' Iperbole; il che confronta con le coſe già dette (79.).

Corollario I.

99. Se tanto SO, che PM, ſi moltiplicheranno per SO, ſi avrà, alternando, l' analogia $\overline{SO}^2 : CP \times PN :: SO \times PM :$ NDAP; ma la ſottangente SO nella Logiſtica è coſtante (50.) e ogni rettangolo CPN inſcritto nello ſpazio iperbolico è ſempre dell' iſteſſa quantità; dunque nel prodotto SO$\times$PM ſi avrà ſempre un rettangolo, che con lo ſpazio iperbolico NDAP ſarà in un rapporto qualunque dato d' eguaglianza, o ineguaglianza, a tenore della relazione, che paſſa tra il quadrato della ſottangente della Logiſtica, e il quadrato della potenza dell' Iperbole; coſicche ſe la ſottangente SO ſarà eguale alla detta potenza, il prodotto SO$\times$PM ſarà ſempre eguale al corriſpondente ſpazio iperbolico NDAP; ed allora ogni applicata PM della Logiſtica AM ſtarà allo ſpazio iperbolico ADNP, come nella Parabola Apolloniana l' aſciſſa al quadrato dell' applicata.

Corollario II.

100. Giacche la Logaritmica ſpirale è una Logiſtica ordinaria incurvata, è chiaro, che ancora in eſſa ſi verificherà, che la ſottangente CΓ del primo raggio AC (*Fig.* 25.) ſtà

stà a qualunque arco circolare AQ, come il rettangolo DAC inscritto nell'Iperbole tra gli asintoti AC, CL, al trapezio iperbolico APND. Dal che deducesi generalmente, che lo spazio iperbolico APND, o il suo egual settore DCN, stà al corrispondente settore circolare ACQ, come la AD minima applicata di detto spazio iperbolico, alla metà della sottangente CT; imperciocche fatta AD = CT, si avrà AD : AQ :: DA $\times$ AC : APND; e moltiplicando i primi due termini per AC, avremo DA $\times$ AC : AQ $\times$ AC :: DA $\times$ AC : APND, il che dimostra, che lo spazio iperbolico APND, o il suo egual settore DCN, sarà doppio del settore circolare ACQ; onde se si fosse fatta AD = $\frac{1}{2}$ CT, il detto spazio iperbolico, o il suo egual settore pur iperbolico, sarebbe stato eguale al detto settore circolare; dal che ricavasi ADNP, ovvero DCN : ACQ :: AD : $\frac{1}{2}$ CT.

Corollario III.

101. Dato dunque un cerchio, si può incassar facilmente la sua area in uno spazio iperbolico-asintotico, supposta cognita la sottangente della logistica spirale, e la sua costruzione; imperciocche ridotto il dato cerchio in un quadrante ACB, e presane una piccola parte aliquota nel settore ACQ, risolvasene tutta l'area in tanti settori al detto settore eguali, indi tagliati tutti i raggi in progressione geometrica continua ne'punti M, *m*, O, e presa la metà della massima sottangente CT della logistica spirale, che passa per tali punti, si erga in perpendicolare dal punto A sulla AC, e tra gli asintoti AC, CL

CL descrivasi l' Iperbole Apolloniana DNr, che passi per il punto D; indi preso il punto O dell'ultimo raggio CB, per cui passa la Logittica spirale, e dal centro C con l'intervallo CO descritto l' arco OR, tirisi all' Iperbole DNr l' applicata Rr; è manifesto, che questa taglierà l'area iperbolica ARrD eguale al settore circolare ACB, ed eguale in conseguenza al dato cerchio.

Corollario IV.

102. Viceversa dato lo spazio iperbolico ARrD, si potrà, supposte l'istesse notizie, descrivere un cerchio ad esso eguale; imperciocchè dal centro C dell' Iperbole col raggio CA descritto il quadrante ACB, e diviso in eguali settori ACQ, QCq &c. i raggi de' quali vengano segati in progressione geometrica continua ne' punti M, m &c. prendasi la metà della massima sottangente CT della spirale logaritmica, che passa per i punti A, M, N, O, ed eretta verticalmente in A sulla CA, per la sua estremità F facciasi passare tra gl' istessi asintoti un' altra Iperbole FGH; indi col raggio CO fisso in C descritto l' arco OR, dal punto R si conduca ad amendue l' iperboli l'applicata RrH; avremo per le cose dette lo spazio ARHF eguale al quadrante ACB, onde fatta l'analogia, come lo spazio iperbolico ARHF, allo spazio ARrD, cioè come la AF alla AD, così il quadrante ACB ad un altro cerchio, questo sarà il cerchio richiesto.

Co-

Corollario V.

103. Dal che apertamente ravvisasi, che dalla determinazione della sottangente della Logistica spirale, e dalla sua descrizione dipendono le quadrature dell' Iperbole, e del cerchio, che sono due delle più celebri Curve, che vanti la Geometria.

Scolio.

104. E' facile il conoscere, che la Logistica spirale nasca da un inarcamento della Logistica comune; imperciocchè sia AMO (*Fig.* 36.) una Logistica comune, uno de' di cui assi sia l' asintoto CD, l' altro la AB; questa vadasi incurvando intorno al centro C in una periferia circolare, mentre la CD si va tutta ristringendo, e concentrando in esso punto C; ne seguirà, che tutte l' estremità dell' applicate dalla parte di CD, cioè i punti E, *e* &c. si riuniranno in C; che le EQ, *eq* &c. saranno tanti raggi di cerchio; e che la curva AMO si cangierà in un' altra, che intorno al centro C farà innumerabili ravvolgimenti, mentre la AB ripassa a incessanti doppi sopra la gia formata ampiezza della periferia circolare, che ha per raggio la CA. Tale è la curva AMOC (*Fig.* 25.), in cui il detto cerchio è ABC (quantunque qui se ne noti soltanto il quadrante), che ha C per centro, la CT per sottangente relativamente al raggio AC, qual sottangente è l' istessa della Logistica, da cui la spirale trae l' origine; CA, CQ, C*q* &c. sono i raggi, e CA,

CA, CM, C*m* &c. i rami, che corriſpondono all' applicate della Logiſtica comune.

PROPOSIZIONE VII.

105. *Sia qualunque Curva* AM (*Fig.* 37. 38.) *il di cui aſſe* TP; *e da tutti i punti* M, N *preſi nel ſuo perimetro tirate le Tangenti* MT, Nt, *che incontrino l' aſſe ne' punti* T, t, *compiſcanſi intorno ad eſſe, conſiderate come diametri, i parallelogrammi* QNBt, PMbT, *dimodoche per i punti* B, b *alla cima degli angoli eſteriori di queſti parallelogrammi paſſi la Curva* BEb; *dico, che lo ſpazio curvilineo* AMNBb *è eguale allo ſpazio curvilineo* AMNQ.

Tirinſi alle PM, QN l' infinitamente proſſime *pm*, *qn* terminanti ne' lati M*b*, NB, e per i punti *m*, *n* paſſino le DO, *do* parallele all' aſſe TP, le quali pure ſaranno infinitamente proſſime, e parallele alle M*b*, NB. Siccome i rettangoli BN*o*, NQ*q*, *b*MO, MP*p* ſono per la coſtruzione complementi di parallelogrammi intorno al diametro, ſarà BN*o* $=$ NQ*q*; *b*MO $=$ MP*p*, e perciò tutti i poſſibili rettangoli BN*o*, *b*MO &c. ſaranno eguali a tutti i corriſpondenti rettangoli NQ*q*, MP*p* &c.; ma i primi non differiſcono ſenſibilmente dall' area AMNB*b* (13.), e i ſecondi dall' area AMNQ; dunque l' area AMNB*b* ſarà eguale all' area AMNQ; il che &c.

COROLLARIO I.

106. E' facilmente conoſcibile, che anche una qualunque porzione BNM*b* è eguale alla corriſpondente porzione

curvilinea PMNQ. Il medefimo dicafi de' due intermedj fpazj curvilinei EnMb, MnqP.

Corollario II.

107. Giacche tutte le BN, bM (*Fig.* 37.) riempienti l'area BbAMN fono eguali a tutte le fottangenti rQ, TP, &c.; fe la curva AMN avrà per natura le dette fottangenti, fempre proporzionali all' afciffe AQ, AP, è chiaro, che tutta l' area BbAMN, ovvero l' area AMNQ ftarà all' area AMNC, come BN:CN, cioè come rQ:AQ; e componendo, fi avrà l' area AMNQ:AQ$\times$QN::rQ:AQ+rQ.

Corollario III.

108. Parimente fuppofta la medefima proprietà nella curva afintotica AMN (*Fig.* 38.), cioè che fiano fempre le fottangenti rQ, TP proporzionali all' afciffe, o diftanze CQ, CP dal centro C, ne verrà, che ftarà una ad una, come tutte a tutte; vale a dire ftarà l' area AMNBb, o fia l' area AMNQT all' area AMNGCT, come BN:NG, o come rQ:QC; e dividendo, ftarà AMNQT:CQ$\times$QN::rQ:CQ$-r$Q; e componendo, farà AMNGCT:CQ$\times$QN::CQ:CQ$-r$Q.

Corollario IV.

109. Dal che raccogliefi generalmente 1.) Che in qualque curva, che abbia le fottangenti proporzionoli all' afciffe, l' aree

l'aree ſtanno come il prodotto delle coordinate, cioè dell'aſciſſe nell'applicate; 2.) Che in qualunque curva non aſintotica (come moſtra la *Fig.* 37.), che abbia parimente le ſottangenti proporzionali all'aſciſſe, l'area curvilinea ſtà al rettangolo circoſcritto, come la ſottangente all'aggregato della ſottangente, e dell'aſciſſa; cioè (fatto il rapporto della ſottangente all'aſciſſa come $n:1$) come $n:n+1$, o come $\frac{n}{n+1}:1$; e in conſeguenza la quadratura generale di tutte le Curve di tale ſpecie ſarà $\frac{n}{n+1}\,AQ \times QN$. 3.) Che in qualunque curva aſintotica (come moſtra la *Fig.* 38.) ſuppoſta la medeſima condizione, l'area ſtà al rettangolo inſcritto, come l'aſciſſa alla differenza dell'aſciſſa, e della ſottangente; cioè (fatto il rapporto dell'aſciſſa alla ſottangente come $n:1$), l'area curvilinea all'inſcrittovi rettangolo, ſtarà come $n:n-1$; o come $\frac{n}{n-1}:1$; e in conſeguenza la quadratura di tutte le curve di tale ſpecie ſarà $\frac{n}{n-1}\,CQ \times QN$. 4.) Siccome poi tutte le curve, che hanno le ſottangenti proporzionali all'aſciſſe, ſono della famiglia delle Parabole, o Paraboloidi, Iperboli, o Iperboloidi tra gli aſintoti all'infinito (22.26.), nelle quali pure le potenze dell'ordinate ſono direttamente, o inverſamente proporzionali all'aſciſſe; ne ſegue, che l'aree di tali curve ſtanno come i prodotti delle coordinate, come gia ſi era ſtabilito (55.88.); e che la loro quadratura, trattandoſi delle Parabole, è generalmente $\frac{n}{n+1}\,AQ \times QN$ (*Fig.* 37.), e trattandoſi dell'I-

Ff 2 perboli

perboli, è $\frac{n}{n-1}$ CQ×QN (*Fig.* 38); il che si accorda con le cose poco anzi dimostrate (87.92.); avvertendo, che qui l'aree paraboliche son prese dalla parte concava della curva, quando n significa un numero intero, e dalla parte convessa, quando denota un rotto, tutto all' opposto di ciò, che si è detto riguardo alla formula $\frac{1}{n+1}$ (87.); quali formule, quantunque sembrino all' aspetto diverse, tuttavolta sono coincidenti, perche se farassi $n = \frac{1}{m}$, la formula $\frac{n}{n+1}$ diverrà $\frac{1}{m+1}$; e la formula $\frac{1}{n+1}$ diverrà $\frac{m}{m+1}$.

PROPOSIZIONE VIII.

110. *Sia intorno all' asse* TP (*Fig.* 39.40.) *una curva qualunque* AM, *la di cui sottangente* PT, *e l' applicata* PM; *e da qualunque punto* O *preso nel suo perimetro tirate indefinitamente le* OQ *parallele all' asse, che seghino la detta applicata* PM *in* R, *facciasi primieramente la* MN *eguale alla sottangente* PT, *indi taglinsi le* RQ *eguali alle corrispondenti sottangenti* tB, *e così sempre; ovvero dal punto fisso* P *tirate tutte le possibili* PQ, PN *eguali, e parallele alle tangenti corrispondenti*, Ot, MT, *nel qual caso tutte le* MN, RQ, *parallele all' asse* AP *eguagliano le sottangenti corrispondenti* PT, Bt; *dico, che il nascente spazio* PQNM *eguaglia la data figura* AMP.

N. 1. Tirisi la pm infinitamente prossima alla PM, e dal punto m conducasi la mn parallela alla MN. Siccome

per

per la ſimilitudine de' triangoli vi è l'analogia TP, ovvero MN : PM :: *me* : *e*M, ſarà MN $\times$ *e*M = PM $\times$ *em* = *pm* $\times$ *me* (13.). Col medeſimo raziocinio, tirata la *bo* infinitamente proſſima alla BO, e la *oq* parallela alla OQ, ſi dimoſtrerà, eſſere QR $\times$ R*r* = *bo* $\times$ *os*; e così ſempre; onde tutta l'area PMNQ ſarà eguale all'area intera AMP; il che &c.

In altra maniera.

N. 2. Tiriſi la P*m*; il parallelogrammo M*mn*N ſarà ſempre il doppio del triangolo M*m*P, e tutta in conſeguenza l'area NQPAM verrà ad eſſer doppia della data figura AMP; ſicche l'area MNQP ſarà eguale all'area AMP; il che &c., qual conſeguenza ſi può anche dedurre dalla Propoſizione precedente, giacche la ſomma delle ſottangenti, poſte l'una accanto all'altra per la medeſima direzione forma ſempre aree eguali, qualunque ſia la configurazione, che può naſcere da un tale aggregato.

COROLLARIO I.

111. Quando dunque ſi potrà dimoſtrare, che gli elementi formanti una figura piana qualunque ſiano eguali alla ſomma delle ſottangenti, che corriſpondono ad uno ſpazio curvilineo dato, queſta figura dovrà eſſere eguale a tale ſpazio.

COROLLARIO II.

112. E' poi manifeſto, che anche la porzione miſtilinea *qner* eguaglia la porzione miſtilinea *bomp*, come pure la por-

porzione mistilinea PRQq eguaglia la porzione mistilinea AOB, e perciò l' area MNQP è eguale all' area AMP tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti.

COROLLARIO III.

113. Si possono dunque formare due figure curvilinee eguali alla data area curvilinea, tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti; imperciocche sia ABC (*Fig.* 41. 42.) la data area curvilinea, sul di cui ambito preso qualunque punto M, e prolungatene indefinitamente le coordinate AC, CB, e le PM, MR ad esse parallele, come nella figura, conducasi la tangente TMt, che incontri le dette coordinate prolungate ne' punti T, t; indi per il punto C facciasi passare la retta NCQ eguale, e parallela alla TMt, ma in maniera, che sia CQ=TM, e CN=Mt, e così sempre; i punti N, n da una parte, e Q, q dall' altra saranno ne i perimetri curvilinei CNn, CQq, i quali riguardo al tutto, e alle parti corrispondenti conterranno aree CnA, CqB, eguali ciascuna all' adiacente area curvilinea ABC; ed in fatti tutte le PN saranno eguali a tutte le Rt, e tutte le RQ a tutte le PT.

DEFINIZIONE X.

114. Le figure CNnA, CQqB, ABC si possono chiamare con l'illustre Padre Grandi *correlate* (a).

Sco-

(a) *Theorem. Hugenian. Cap. VIII. n. 5.*

S c o l i o.

115. Avvertasi, che la curva QN (*Fig.* 39.40.) nasce egualmente, e dal porre sulla PM le perpendicolari MN, RQ eguali alle corrispondenti sottangenti TP, *r*B, e dal situare le PN, PQ eguali, e parallele alle tangenti corrispondenti TM, *ro*; sicche potendosi nella curva QN dimostrare o l'una, o l'altra di queste proprietà, ne verrà sempre, che lo spazio curvilineo PMNQ sarà eguale, sì riguardo al tutto, che alle parti, alla data figura AMP. Che se nelle *Figure* 41. 42. non fossero determinate le sottangenti, siccome si deve considerare la CN come eguale, e parallela alla tangente M*t*; per trovare le porzioni corrispondenti eguali in ambe l'aree curvilinee eguali CN*n*A, ABC, condotta la NM parallela ad una coordinata CB, ergasi sovra essa dal punto M la normale MR, che incontri in R la detta CB, e che sarà parallela all'altra coordinata AC, si avrà sempre l'area curvilinea CNP eguale all'area BRM, e così degli altri spazj. Questo avvertimento è utile nel venire alla misura particolare delle curve, come vedrassi ne' seguenti Esempj, da' quali pure ricaverassi, che si potrà scegliere l'una, o l'altra maniera, secondo che più netta, e più facile potrà rendersi la ricercata misura.

Corollario IV.

116. Il medesimo metodo (110. *N.* 2.) si può adattare alle figure PDMA (*Fig.* 43.44.), pigliando il punto P all'e-

all' estremo della base, o in qualunque altro luogo della loro curvità, ed anche dentro alla figura, e tirando dal punto P la retta Po, che sempre parallela alle tangenti MT, tagli le MR, *mr* applicate alla base PA ne' punti *e*, *o*; imperciocchè per il parallelogrammo M*mo* sempre doppio del triangolo M*m*P, in qualunque luogo della curvità DMA si pigli il punto M, l' area MANO sarà doppia del corrispondente trilineo PAM, onde tutta l' area PDMANO*o*P sarà anch' essa doppia dell' area PDMA.

E S E M P I O I.

117. Se la curva AM (*Fig.* 42.) sia quella detta da i Geometri *Trattoria* (cioè sia la traccia, che un corpo in M legato ad un filo di grandezza costante MT, descrive, mentre vien tirato lungo la direzione PT), siccome la sua Tangente MT è costante, come dalla sua genesi apparisce, la sua figura correlata CQ*q*B, è evidente, che sarà un quarto di cerchio, il di cui centro è il punto C, giacchè tutte le CQ parallele alle tangenti debbono esser sempre fra loro eguali; onde l' area BAC della Trattoria sarà eguale al quadrante circolare, che abbia per raggio la tangente di detta curva, e ciò tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti.

E S E M P I O II.

118. Se la curva AM (*Fig.* 40.) sarà una Logistica; siccome la sua sottangente TP, ovvero *t*B è sempre l' istessa

(50.),

(50.), tutte le MN, RQ erette perpendicolarmente sulla PM saranno eguali, e perciò l'area QNMP sarà un rettangolo, che avrà per base l'applicata PM, e per altezza la sottangente TP; vale a dire, che l'area asintotica della Logistica eguaglia il doppio del triangolo rettangolo formato dall'applicata, dalla tangente, e dalla sottangente; il che concorda con la gia data misura (97. *N.* 2.).

ESEMPIO III.

119. Se la curva AMB (*Fig.* 45.) sarà una semicicloide ordinaria, a cui sia circoscritto il rettangolo ACBD, le sue tangenti MT, *mt* saranno eguali, e parallele alle corde AN, A*n* del suo semicerchio genitore AND (42.43.), onde se dal punto C si tireranno le CQ, C*q* eguali, e parallele alle corde AN, A*n*, ne nascerà il semicerchio CQB eguale sì al semicerchio genitore AND, che al trilineo cicloidale AMBC; dal che deducesi, che essendo per la natura della cicloide, e per Archimede il rettangolo ACBD quadruplo del semicerchio AND, lo spazio semicicloidale AMBD sarà triplo del suo semicerchio genitore AND; e la porzione circolare CQE, ovvero C*qe*, sarà per lo Scolio novissimo (115.) eguale al trilineo AMH, ovvero A*mh*, alzata la MH, ovvero la *mh* perpendicolare alla CA. In oltre il segmento circolare contenuto dall'arco CQ*q*, e dalla sua corda C*q* eguaglia il trilineo corrispondente *mt*A, compreso dalla tangente *mt*, dalla porzione *t*A dell'applicata AC, e dalla curva cicloidale AM*m*. Di più se dal parallelogrammo A*tmn*, che è doppio del triangolo A*tm*, si toglieranno

i due segmenti, l'uno circolare compreso dall'arco A*n*, e dalla sua corda, l'altro cicloidale compreso dalle tangenti A*r*, *rm*, e dall'arco AM*m*, ne rimarrà il segmento, o trilineo cicloidale concavo *m*MAN*n* contenuto dall'arco cicloidale AM*m*, dall'arco circolare AN*n*, e dall'applicata *mn*, che sarà doppio del segmento cicloidale AM*m*; onde per il medesimo discorso, anche la zona MN*nm* sarà doppia del settore cicloidale MA*m* compreso dall'arco M*m*, e dalle corde AM, A*m* &c.

E S E M P I O IV.

120. La curva AMB (*Fig*. 46.) sia la Cissoide di Diocle, che abbia con la semicicloide CQD comune il semicerchio genitore ANC; tirata ad essa Cissoide qualunque corda AM, ed ordinata la MQ comune alle tre nominate figure, come ancora condotta l'applicata QE alla semicicloide, e congiunte le CN, NA, essendovi per la natura della Cissoide l'analogia NR:RA::RA:RM, l'angolo NAM sarà retto; onde per la similitudine de' triangoli CNR, RAM, la AM sarà parallela alla CN, e in conseguenza sarà parallela, ed eguale alla tangente cicloidale QT; il che verificandosi in tutte le corde A*m* riguardo a tutte le tangenti *tq*, ne segue (113. 115.), che tutta l'area asintotica cissoidale AM*m*BC sarà, tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti, eguale alla semicicloide ADQ*q*C, dimodoche lo spazio AMR eguaglierà lo spazio QDE, e lo spazio RM*mr* eguaglierà lo spazio corrispondente QE*eq*.

Co-

COROLLARIO I.

121. Se alla Cissoide AMBC aggiungasi il semicerchio ANC, tutta la figura ANCB*m*M sarà quadrupla del detto semicerchio, e in conseguenza la porzione AFNRM sarà quadrupla del segmento circolare corrispondente compreso dall'arco AN, e dalla sua corda.

COROLLARIO II.

122. Per esser tutta la Cissoide ACB*m*M tripla del semicerchio genitore ANC (per l'esempio antecedente), anche il settore cissoidale CAM compreso dal diametro CA, dal ramo CM, e dall' arco AM, sarà triplo del gia nominato segmento contenuto dall' arco circolare NA, e dalla sua corda.

COROLLARIO III.

123. Quindi il tetragonismo d' un segmento cicloidale detratto da un segmento circolare; imperciocche stando AFNRM : CAM :: 4 : 3; ed essendosi dimostrato lo spazio cissoidale ARM eguale al segmento cicloidale DQE, sarà $4\text{CRM} + 4\text{QDE} = 3\,\text{AFNA} + 3\,\text{NRA} + 3\,\text{QDE}$; ovvero $\text{NRA} = 3\,\text{AFNA} - \text{QDE}$, per essere il triangolo CRM eguale al triangolo NRA. Ed in fatti pigliando i segmenti totali, se dal triplo dell' area del semicerchio CNA tolgasi l' area della semicicloide CQDA, il residuo sarà eguale a zero, come

Gg 2 deve

deve essere, perche la detta area semicicloidale eguaglia, come si è dimostrato (119.), il triplo di detta area circolare.

E S E M P I O V.

124. Sia la curva AIFC (*Fig.*47.) la spirale d' Archimede. Eretta normalmente a qualunque suo raggio AC, ovvero *a*C, la sottangente CT, ovvero C*t*, la prima delle quali sarà eguale alla periferia circolare, che ha per raggio la CA, e la seconda alla periferia *a*GP, che ha per raggio la *a*C (32.), e da' punti T, *t* condotte le Tangenti TA, *ta*, tirinsi le CI, C*i* infinitamente prossime alle CA, C*a*, e compiscansi i parallelogrammi, come nella figura. Giacche i triangoli CIA, C*ia* non differiscono sensibilmente da un settore di spirale (13.), e sono la metà de' rettangoli AH, *ab*, saranno ancora la metà de' rettangoli RD, *rd*, che coi detti rettangoli sono complementi intorno a' diametri AT, *at*; onde i due settori CIA, C*ia* saranno la metà del prodotto delle loro sottangenti CT, C*t* nelle AR, *ar*, e così da per tutto; dunque dall' estremità A del raggio CA, e dal punto P della CP $=$ *a*C abbassate le perpendicolari AN $=$ CT, e PM $=$ C*t*, e così sempre, si verrà a formare l'area curvilinea ACMN, che sarà il doppio dell' area della spirale, tanto relativamente al tutto, che alle parti corrispondenti; ma si è dimostrato, che le sottangenti della spirale stanno come i quadrati de' loro raggi (33.), e però PM $=$ $\overline{CP}^2$; dunque essendo ACMN uno spazio parabolico esteriore (22.), la di cui quadratura è $\frac{1}{3}$ AN $\times$ AC (85.), ovvero

vero due terzi d' un triangolo, che ha per altezza il raggio AC, e per base la di lui periferia ALM, l' aree della spirale in questione saranno eguali alla terza parte de' settori circolari, che le circoscrivono; e però lo spazio *aib*C sarà la terza parte del settore *a*GP, come l' area intera AF*ab*C è la terza parte dell' intero cerchio ALM.

COROLLARIO.

125. Di qualunque grado sia l' Elice AF*ab*C, si è dimostrato, che la sua sottangente stà generalmente al raggio, come $PM : \overline{CP}^{\frac{m+n}{m}}$ (36.); onde l' equazione generale alla curva CMN sarà $\overline{PM}^{m} = \overline{CP}^{m+n}$, qual' equazione è alle Parabole di tutti gli ordini all' infinito, e però l' area Parabolica esteriore ACMN stà al rettangolo circoscritto, come $\frac{m}{2m+n} : 1$. (88.); ma l' area di qualunque spirale stà (come dalla fatta dimostrazione può ricavarsi) al settore circolare circoscritto, come l' area Parabolica ACMN al circoscritto rettangolo; dunque anche l' area d' una spirale di qualunque grado stà al settore circoscritto, come $\frac{m}{2m+n} : 1$. Così posta l' equazione generale alle spirali $\overline{AC}^{n} \times \overline{AF}^{m} = R^{m} \times \overline{CF}^{n}$, se facciasi $m = 1, n = 1$, il detto rapporto sarà come $\frac{1}{3} : 1$; cioè sarà un terzo del settore circoscritto appunto come si è dimostrato. Se $m = 2, n = 3$, lo spazio della spirale sarà $\frac{2}{7}$ del settore circoscritto &c.

ESEM-

ESEMPIO VI.

126. Sia PBFA (*Fig.* 48.) una Logistica spirale; siccome gli angoli APT, ABt formati da' suoi raggi AP, AB, e dalle rispettive tangenti PT, Bt, sono sempre eguali (51.), e però simili sono i triangoli rettangoli APT, ABt, saranno le sottangenti AT, At sempre proporzionali a' raggi AP, AB; onde eretta dal punto P la normale PV eguale alla massima sottangente AT, e giunta la AV; indi presa sulla AP la AD = AB, e tirata alla PV la parallela DE, che eguaglierà la At, si avrà per un raziocinio simile a quello dell' Esempio antecedente, il triangolo APV, tanto in tutto, che in parte, doppio dell' area della detta Logistica spirale; e però l' area PVED sarà doppia dell' area PBA, come pure l' area DAE dell' area BFA.

PROPOSIZIONE IX.

127. *Sia qualunque curva* MN (*Fig.* 49. 50. 51.), *e sul suo perimetro, o al di dentro, o al di fuori di esso prendasi un punto* C, *in cui concorrano ad angolo retto le due rette* CA, CT, *una delle quali, cioè* CA, *serva d' asse, su cui siano applicate normalmente le* PM, QN; *indi a' punti* M, N, *si tirino le tangenti* MT, Nt, *che dalla* CT *taglino le* CT, Ct; *prolungate poscia le* MP, NQ, *facciasi* PS = CT, QO = Ct, *e così sempre in maniera, che queste* PS, QO *tocchino con la loro estremità la curva* OS; *dico, che lo spazio* PSOQ *intercetto dall' applicate prolungate* PS, QO, *dall' asse*

PQ,

PQ, *e dalla curva* SO, *è doppio del corrispondente trilineo* CMN *compreso dalla prima curva* MN, *e dalle rette* CM, CN *condotte dal preso punto* C *a' detti punti* M, N.

N. 1. Tirisi alla MS l'infinitamente prossima equidistante *ms*, e dal punto C condotta sulla tangente MT la normale CB, dal punto M si cali sulla *ms* la normale M*o*. Essendo *mo* parallela a CT, e sovra di esse cadendo la M*m*T, gli angoli in *m*, T saranno eguali, onde simili saranno i triangoli M*mo*, TCB; il che dà l'analogia M*m*: M*o* (P*p*) :: CT (PS) : CB; sicchè $Mm \times CB = Pp \times PS$, cioè l'areola elementare PS*sp* eguaglierà il doppio del triangolo MC*m*, la di cui altezza è CB. Dunque la somma di tutte l'areole elementari PS*sp*, vale a dire tutta l'area PSOQ eguaglierà il doppio della somma di tutti i triangoli elementari MC*m*, cioè il doppio del corrispondente trilineo MCN; il che &c.

In altra maniera.

N. 2. Condotta dal punto C la CF parallela alla tangente TM, che incontri ne' punti F, H le PM, *pm* prolungate dove bisogna, tirisi la FI parallela alla M*o*; il parallelogrammo FH*m*M eguaglia il rettangolo FI*o*M eguale per la costruzione all'area elementare PS*sp*; ma il parallelogrammo FH*m*M è doppio del triangolo MC*m*; dunque ancor l'area elementare PS*sp* sarà doppia di detto triangolo MC*m*, e però l'area PSOQ sarà doppia del trilineo CMN; il che &c.

Co-

COROLLARIO I.

128. Se tutte le PS, QO saranno la metà delle CT, C*r*, l'area PSOQ sarà eguale al trilineo MCN, e così delle altre aree corrispondenti; onde data una figura curvilinea, se ne può costruire un'altra, che sia ad essa in una data ragione.

COROLLARIO II.

129. Se il punto C sarà preso sul vertice d'una curva MN divergente (*Fig.* 49.), l'area costrutta ACOV non sarà asintotica; ma se la detta curva MN sarà ritornante in se stessa (*Fig.* 22.), o se esso punto C sarà preso dalla parte della base di detta curva (*Fig.* 50.) o se dalla parte del vertice, ma in distanza (*Fig.* 51.), è manifesto, che l'area da costruirsi nella maniera prescritta deve essere asintotica.

COROLLARIO III.

130. Per ottenere il valore delle CT, C*r*, e in conseguenza l'equazione alla Curva OS, prolungata la tangente N*r* finche incontri nel punto E l'asse AC, esteso anch'esso, se bisogna, facciasi l'analogia EQ:QN::EC:C*r*; sarà C*r* $= \frac{EC \times QN}{EQ}$; onde sostituiti i valori in termini dell'ascissa, ne proverrà l'equazione desiderata; il che può talvolta ottenersi anche con altri più facili compensi, come vedrassi negli Esempi consecutivi.

ESEM-

E S E M P I O I.

131. Sia CM (*Fig.*49.) una Parabola di qualunque genere compreso nell' equazione $CP = \overline{PM}^n$, ed il punto C sia preso nel suo perimetro; siccome le sottangenti sono in tal caso proporzionali all' ascisse (22.), avremo $Ct = \left(\frac{n-1}{n}\right)$ QN; presa dunque la $QO = \frac{1}{2}CT = \left(\frac{n-1}{2n}\right)QN$, e così sempre, ne nascerà la curva COV, che avrà l' aree COQ, CSP eguali a' segmenti Parabolici corrispondenti CN, CNM. Tal curva poi sarà nuovamente una Parabola della specie della Parabola CNM, perche essendo tanto la QO, che la PS porzioni simili dell' applicate QN, PM, il loro quadrato sarà sempre proporzionale all' ascisse CQ, CP; onde la quadratura dello spazio COVA, cioè $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ CA $\times$ AV (87.), ovvero $\left(\frac{n-1}{2n+2}\right)$ CA $\times$ AD eguaglierà il corrispondente segmento Parabolico CNMD. Sicche se $n = 2$, il detto segmento sarà $\frac{1}{6}CA \times AD$; ed in fatti dall' area AMDA togliendo il triangolo DAC, cioè da $\frac{2}{3}$ togliendosi $\frac{1}{2}$ il residuo sarà $\frac{1}{6}$.

ESEMPIO II.

132. Rappresenti AM (*Fig.* 50.) una dell' infinite Parabole comprese nell' equazione generale $AP = \overline{PM}^n$, ed il punto C sia preso interiormente al perimetro curvilineo; per essere la $EC = EA + AC$, sarà la $Ct = \left(\frac{EA + AC}{EQ}\right) \times QN = QO$, cioè fatto $AC = 1$, e sostituiti i valori, sarà $QO = \left(\frac{n-1}{n}\right)\overline{AQ}^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\overline{AQ}^{\frac{1}{n}-1}$; qual' equazione include infinite curve quadrabili, giacche la loro area AVSP è doppia dell' area Parabolica CMA; ovvero col crescere, o diminuire quanto bisogna tutte le QO, sarà all'area CMA in una data ragione. In simil guisa procedasi quando il punto C fosse preso all' esteriore di detta Curva AM, come nella *Fig.* 51.

ESEMPIO III.

133. Sia AMD (*Fig.* 52.) un quadrante di cerchio, ovvero sia ANE un quadrante d' Ellisse, che abbiano comuni l' asse AC, e la semiordinata PM, e da' punti M, N conducansi le tangenti MT, Nt ad incontrare in T, t le CD, CE, prolungate; siccome queste CT, Ct sono reciproche ciascuna a ciascuna, delle rispettive semiordinate PM, PN, ne verrà, che costruendo con esse gli spazj asintotici AVSO, AVQR

AVQR nel modo prefcritto, quefti avranno le femiordinate PS, PQ, reciproche ciafcuna a ciafcuna delle corrifpondenti femiordinate PM, PN, onde facile farà la coftruzione, e la cognizione delle Curve SO, QR, l' aree delle quali fiano tanto ai fettori corrifpondenti del cerchio, che dell' Elliffe in una data ragione; e intanto offervifi, che ciò confronta con quello, che fi è poco anzi dimoftrato (*93.94.*).

Corollario I.

134. Giacche il fettore circolare AMC ftà all' Ellittico ANC, come DC : CE (*P.I.* 73.), anche l'area AVSO ftarà all' area AVQR, come CO : CR per la coftruzione, e l' area AVSP all' area AVQP in confeguenza, come PS : PQ, ovvero come CO : CR, purche le coftruzioni fiano fatte a dovere.

Corollario II.

135. Non folo l' area AVSP, ftando come il fettore ACM, farà proporzionale all' arco AM, quanto ancora l' area AVQP, ftando come il fettore Ellittico ACN, farà ad effo arco AM proporzionale; perche effendo il detto fettore Ellittico ACN per le Sezioni Coniche quarto proporzionale dopo il maggiore, il minor affe, e il fettore AMC, ed effendo i femiaffi AC, CE coftanti, il fettore Ellittico ACN farà proporzionale tanto al fettore circolare ACM, che all' arco AM, e in confeguenza anche l' area AVQP farà ad effo arco AM proporzionale.

SCOLIO.

136. Per dimostrare, che la CT è reciproca alla PM, come pure la C*t* alla PN, sia ADC (*Fig.*53.) un quadrante di cerchio, e AEC un quadrante d' Ellisse, che abbiano C per centro comune, e preso nella periferia circolare un punto M, guidisi da esso la tangente MT ad incontrare in T il raggio CD prolungato; indi ordinata la MP, tirisi la MG parallela all' asse AC, e giungasi MC. Similmente tirata al punto N preso nel perimetro Ellittico la tangente N*t*, che vada a ferire nel punto *t* l'esteso semiasse CE, ed ordinata la NQ, conducasi la NI parallela all'altro semiasse AC.

Per esser nel quadrante circolare ADC retto l' angolo TMC, sarà TC:CM::CM:CG, onde $TC = \frac{\overline{CM}^2}{CG} = \frac{\overline{CM}^2}{PM}$; ed è CM costante; dunque CT è reciproca all' applicata PM. Nel quadrante Ellittico AEC, è noto per le Sezioni Coniche, essere CI:CE::CE:C*t*, onde sarà [illegible] cioè per esser la CE costante, la C*t* sarà reciproca all' applicata QN.

ESEMPIO IV.

137. Sia la curva AMC (*Fig.* 22.) un semicerchio, o una semiellisse, nel di cui vertice sia preso il punto C; e da

qualunque punto N tirate la tangente N*r*, e la secante ANH, che incontrino ne' punti *r*, H la CH normale in C alla AC; è noto per le Sezioni Coniche che la CH sarà divisa per mezzo in *r*. Presa dunque la QO doppia della C*r*, e così sempre, si costruirà la Curva AVOC, il di cui AV, la quale sarà quadrupla de' corrispondenti segmenti Ellittici, o circolari. Quindi per trovar la natura della costrutta figura, osservisi, che vi è l' analogia $\overline{AQ}^2 : \overline{QN}^2 :: \overline{AC}^2 : \overline{CH}^2$; ma nel cerchio è $\overline{AQ}^2 : \overline{QN}^2 :: AQ : QC$; dunque $AQ : QC :: \overline{AC}^2 : \overline{CH}^2 = \overline{QO}^2 = \overline{AC}^2 \times \frac{QC}{AQ}$; sicche stando $\overline{QO}^2$ come $\frac{QC}{AQ}$ per essere AC costante, ovvero QO come $\frac{QN}{QC}$, vedesi, che questa Curva è la Versiera Grandiana, di cui si è parlato (*29.95.*), dimodoche se fosse QO = C*r*, l' area AVOC, tanto in parte, che in tutto, sarebbe doppia del semicerchio AMC, come con altro metodo si è stabilito (*96.*).

E S E M P I O V.

138. Sia AM (*Fig.* 54.) un' Iperbole equilatera, il di cui asse trasverso AC. Tirata al vertice A la tangente AG, che incontri in G la MC, la AG sarà per le Sezioni Coniche doppia della AI recisa dalla tangente MT; onde per i triangoli simili CAG, CPM avremo $\overline{CP}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{AG}^2$; ma per la natura dell' Iperbole $\overline{CP}^2 : \overline{PM}^2 :: CP : AP$;

dun-

dunque $CP:AP::\overline{CA}^2:\overline{AG}^2=\overline{CA}^2\times\frac{AP}{CP}$; ficche fatta la PS dupla della AI, e così fempre, l'equazione alla natane curva AS, che avrà l'area quadrupla del fegmento Iperbolico AMA, farà $\overline{PS}^2=\overline{CA}^2\times\frac{AP}{CP}$, e che col P. Rollo (a) potrà chiamarfi *Verfiera Iperbolica*, la di cui coftruzione è fimile a quella della Verfiera Grandiana (29.137.), ftando $\overline{PS}^2$ come $\frac{AP}{PC}$ a caufa della coftante AC.

E S E M P I O VI.

139. Sia AM nuovamente un' Iperbole equilatera, il di cui affe trafverfo AC. Dal vertice A fatta paffare una retta qualunque MAH, che tagli la curva nel punto M, e la CH (perpendicolare in C al detto affe) nel punto H; indi tirata al punto M la tangente MT, fe alla CH fi farà eguale la PK, e così fempre, l'area PKVA farà quadrupla del fettore Iperbolico efteriore CAM, giacche per le Sezioni Coniche la CH è tagliata per mezzo in T dalla tangente MT; dal che ricavafi facilmente il valore della PK, perche effendo $\overline{AP}^2:\overline{PM}^2::AP:PC::\overline{AC}^2:\overline{CH}^2$, farà $\overline{CH}^2$, ovvero $\overline{PK}^2=\overline{AC}^2\times\frac{PC}{AP}$; ficche per effere AC coftante, ftarà

(a) *De corporum motu rectilineo & curvilineo Lib. I. § 67.*

rà $\overline{PK}^2$ come $\frac{PC}{AP}$, il che forma il carattere d' un' altra Verſiera Iperbolica reciproca a quella dell' Eſempio precedente.

PROPOSIZIONE X.

140. *Eſſendo nota la natura d' una data curva, trovar la natura, la coſtruzione, e la quadratura d' un' altra curva, le di cui aree intorno all' aſſe comune ſiano proporzionali all' applicate tanto interiori, che eſteriori della curva data.*

Sia AM (*Fig.* 24. 29. 30. 31. 32. 33.) la data curva, la di cui ſottangente RQ (*Fig.* 24. 29. 30.), ovvero PT (*Fig.* 31. 32. 33.); giacche l' area ADNP della curva DN, che richiedeſi, e che deve avere con la curva AM comune l' aſſe AP, ſi è dimoſtrata eguale a $TP \times PN$ (78.), ſtarà per l' ipoteſi $PN \times TP$ come PM; cioè ſupponendo PM moltiplicato in una conveniente quantità coſtante fatta $= 1$, ſi avrà l' equazione $PN \times TP = PM$, e però $PN = \frac{PM}{TP}$ (*Fig.* 31. 32. 33.); ovvero $PN = \frac{RQ}{QM}$ (*Fig.* 24. 29. 30.), eſſendo $TP : PM :: QM : RQ$; vale a dire eguaglierà nel primo caſo l' applicata diviſa per la ſottangente, e nel ſecondo la ſottangente diviſa per l' applicata. Soſtituiti dunque all' applicata, e alla ſottangente i valori in termini di AP, ſi verrà con l' equazione, che ne riſulta, a determinare la natura della richieſta curva DN, di cui ſi può avere nel tempo iſteſſo

la

la costruzione, e per le cose dette (78. 80.) la quadratura, il che &c.

ESEMPIO I.

141. Sia AM (*Fig.* 30.) una Parabola cubica, in cui $AQ = \overline{QM}^3$; siccome in questa la sottangente $RQ = 3AQ$ (19.) $= 3\overline{QM}^3$; sarà $RQ = 3\overline{QM}^2$; onde si avrà l' equa-
ne $PN = 3\overline{QM}^2 = 3\overline{AP}^2$, il che dimostra .
na Parabola quadratica rivolgente la
AP (22.), la quadratura del di cui s
... è in conseguenza $\frac{1}{3} AP \times PN$ (81.).

ESEMPIO II.

142. Sia la curva AM (*Fig.* 30.) una dell'infinite Parabole, o Paraboloidi comprese nell' equazione $\overline{AQ}^n = \overline{QM}^m$, in cui il numero n sia minore del numero m, sarà la sottangente $RQ = \frac{m}{n} AQ$ (22.) $= \frac{m}{n} \overline{QM}^{\frac{m}{n}}$; onde essendo $\frac{RQ}{QM} = \frac{m}{n} \overline{QM}^{\frac{m-n}{n}}$, l' equazione alla curva richiesta sarà $\overline{PN}^n = \frac{m}{n} \overline{QM}^{m-n}$; ovvero $\overline{PN}^n = \overline{AP}^{m-n}$; il che dimostra, che

anc'

anche la curva ricercata sarà in tal caso del genere delle Parabole, con questa circostanza, che quando $n=1$, ed m significano un numero intero, la prima Parabola AM è sempre d' un ordine superiore alla seconda AN, la di cui quadratura è generalmente $\frac{AQ \times QM \times PN}{RQ}$ (80.) $= \frac{n}{m} AP \times PN$. Sicche se $n=1$, $m=3$, cioè se la curva AM sarà una Parabola cubica, la curva DN sarà una Parabola quadratica, la di cui quadratura, come nell' antecedente Esempio si è veduto, sarà $\frac{1}{3} AP \times PN$. Ma se $n=1$, $m=2$, l' equazione alla curva AN diverrà $PN=2AP$; cioè la AN si cangerà in una retta, e la figura ANP sarà un triangolo rettangolo, in cui AP è il doppio della PN, onde si avvera, che il suo spazio sia $\frac{1}{2} AP \times PN$.

S C O L I O.

143. Notisi, che quando $\frac{n}{m} AP \times PN$ denota più della metà del rettangolo APN, come se fosse $n=2$, $m=3$, allora la curva Parabolica AN non rivolta più la curvità, ma la concavità all' asse, come nella *Fig.* 29.

E S E M P I O III.

144. Sia AM (*Fig.* 33.) una Parabola compresa nell' equazione generale $\overline{AP}^m = \overline{PM}^n$, ma sia posta diversamente dalle figure antecedenti, cioè rivolta con la sua concavità all' as-

ſe AP comune con quello della curva DN, che ricercaſi; ſiccome è la ſottangente $PT = \frac{n}{m} AP$ (22.), l' equazione alla curva DN, che è $PN = \frac{PM}{PT}$, ſarà, ſoſtituendo i valori, $PN = \frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m-n}{n}}$, ovvero $\overline{PN}^{n} = \overline{AP}^{m-n}$, e la ſua quadratura, che è $PT \times PN$ (78.), ſarà $\frac{n}{m} AP \times PN$. Così ſe $m = 2, n = 3$, l' equazione alla curva DN ſarà $PN = \frac{2}{3} \overline{AP}^{-\frac{1}{3}}$, la di cui quadratura $AP \times PN$ concorda con la miſura, che ricavaſi dalle già date formule generali (92.109.).

S c o l i o.

145. E qui ancora oſſervisi 1.) che m deve eſſer ſempre minore di n, acciò la curva AM volti ſempre all' aſſe AP comune con quello della curva DN la concavità (22.), onde dovendo eſſer ſempre la quantità $m - n$ un numero negativo, vedeſi, che la curva DN ſarà ſempre del genere dell' Iperboli tra gli aſintoti. 2.) Che ſe ſi faceſſe $m = n$, la curva AM ſi trasformerebbe in una retta, e l'area AMP in un triangolo rettangolo equicrure, confondendoſi la AT con la AM; ed allora la PN ſarebbe coſtante; infatti dovendo la PM ſtare come la AP, anche lo ſpazio ADNP dovrà ſtare come la AP, il che dimoſtra, che tali ſpazj ſaranno tanti rettangoli della medeſima altezza PN, e perciò la curva DN dovrà cangiarſi in una retta parallela alla AP, e ſarà vero, che ſia lo ſpazio $ADNP = AP \times PN$.

ESEM-

ESEMPIO IV.

146. Sia la curva AM (*Fig.*31.) una dell'infinite Iperboli tra gli asintoti comprese nell' equazione $\overline{CP}^{m} = \overline{PM}^{-n}$; per essere la sottangente $PT = -\frac{n}{m} CP$ (26.), l' equazione alla curva DN, che è $PN = \frac{PM}{PT}$, sostituendo gli equivalenti, sarà $PN - \frac{m}{n} \overline{CP}^{\frac{-m-n}{n}}$, ovvero $\overline{PN}^{n} = -\overline{CP}^{-m-n}$; il che dimostra, essere anche la curva DN del genere dell'Iperboli tra gli asintoti, la di cui quadratura è in generale $TP \times PN = \frac{n}{m} CP \times PN$, qual valore essendo accompagnato col segno negativo, fa conoscere, che l' area quadrata non è dalla parte dell'asse PC, vale a dire non è l' area CVNP, ma dalla parte opposta, cioè NDP, il che è verissimo, perche l' aree VC*pn*, VCPN non possono, senza involgere assurdo, stare come le *pm*, PM. Così se $m = 1$, $n = 1$, l' equazione all' Iperbole DN sarà $PN = \overline{CP}^{-2}$, l' area NDP sarà $CP \times PN$, ed allora la curva AM sarà un' Iperbole Apolloniana, perche la CP deve esser reciproca alla PM.

SCOLIO.

147. Qui parimente notisi, 1.) che l' aree dell' Iperboli tra gli asintoti non son quadrabili, se non da quella parte, dove le potenze dell' applicate sono minori di quelle dell' a-

 scisse,

fciffe, eccetto gli fpazj dell' Iperbole comune, niuno dei quali è quadrabile. 2.) che queft' aree iperboliche non quadrabili fono ftate credute un più che infinito dal Wallis [a]; e il Padre Grandi [b] ha pretefo dimoftrare, che ciafcuna di queft' aree fia infinitamente maggiore d' un' altra pure infinita di grado proffimamente inferiore, e ciò all' infinito; ma il Varignon [c], e il Leibnizio [d] col confutare l' opinione del Wallis hanno gettato a terra quefte ftravaganze, quantunque Uomini grandi fiano ftati i due nominati, che l' avevano adottate. Su tal propofito prefo il folito linguaggio de' Geometri, io dirò di paffaggio, che confiderata ex. gr. l' Iperbole cubica tra gli afintoti, in cui $\overline{PN}^2 = AP$(*Fig.*33.), per effer l' area $ADNP = 2AP \times PN$, fe l' afciffa AP diverrà infinita, nel qual cafo l' applicata PN diventa zero, tutta l' area ADNHA farà $2 \times \infty \times 0 = 2$, a caufa dell' analogia $0:1::1:\infty$; il che darebbe a conofcere, che l' area PNH non è per lo meno un infinito d' infinito, giacche può efprimerfi con un numero finito; e così degli altri cafi, ne' quali luffureggiano gl' infiniti di ordini fuperiori.

Esempio V.

148. Sia AF (*Fig.*33.) una curva qualunque, e l' altra curva AMB fia tale, che la FM fia fempre eguale all' arco corri-

(a) *Arithm. infinit. Scol. Prop.* 101. *fol.* 407. & *Prop.* 104. *fol.* 409.

(b) *De infinitis infinitorum, & infinite parvorum ordinibus.*

(c) *Mem. de l'Acad. Roy. des Scienc. an.* 1706.

(d) *Act. Eruditor. an.* 1712. *pag.* 167. *feq.*

corrispondente FA, è noto per le cose dette (41. N. 2.), esser la sottangente $PT = \frac{MP \times PG}{GF + PF}$; onde l'equazione generale alla curva DN sarà $PN = \frac{PM}{PT} = \frac{PF + GF}{PG} = \frac{Pp + pF}{PF}$, se si suppone, che P*p* sia la sunnormale della curva AF (e qui le PM, *pm* non si considerano come infinitamente prossime; il che pure si è fatto altrove, e si seguiterà a fare all'occorrenza per non moltiplicar le figure); sicchè la quadratura dello spazio ADNP, cioè $PT \times PN$ sarà $PM = (PF + Arc. FA) \times 1$; eguale cioè al prodotto della somma dell'applicata PF, e dell'arco FA in una quantità costante, cioè in quella quantità costante, che si vuol moltiplicare nella formula $\frac{PF + GF}{PG}$, per assegnare maggiore, o minor lunghezza alla PN nella costruzione della curva DN. Data dunque la natura della curva AF, si può, quando si voglia, con le sole sue ascisse, ed applicate costruire la curva DN, sostituendo alle GF, PG, cioè alla tangente, e sottangente, i valori in termini di AP, PF.

Corollario I.

149. Quindi se la AF sarà un cerchio, il di cui centro *p*, siccome per la sua natura abbiamo $\overline{PF}^2 = (pF + Pp) \times PA$, si avrà $AP : PF :: PF : pF + Pp :: PG : GF + PF$; onde $PN = \frac{GF + PF}{PG} = \frac{PF}{AP}$; qual' equazione è alla Versiera

Gran-

Grandiana, la di cui area ADNP è proporzionale alla corrispondente semiordinata PM della semicloide AM, appunto come superiormente si era stabilito (64.).

COROLLARIO II.

150. Se AF sarà una Parabola di qualunque genere compresa nell' equazione $\overline{AP}^m = \overline{PF}^n$, sarà la sottangente PG $= \frac{n}{m} AP$ (22.), e la GF $= \frac{1}{m}\sqrt{\left(n^2\overline{AP}^2 + m^2\overline{AP}^{\frac{2m}{n}}\right)}$; onde PN $= \frac{GF + PF}{PG} = m\sqrt{AP} + \sqrt{\left(n^2\overline{AP}^2 + m^2\overline{AP}^{\frac{2m}{n}}\right)}$; sicche se $m = 1, n = 2$, sarà PN $= \sqrt{AP} + \sqrt{(4\overline{AP}^2 + AP)}$, ovvero PN $= \frac{Pp + \sqrt{(\overline{Pp}^2 + \overline{PF}^2)}}{PF}) = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{4} + AP}}{\sqrt{AP}})$, quando Pp sia sunnormale (149.); il che dà a conoscere, che la PN nel vertice A della curva AF, o AM diventa asintoto.

ESEMPIO VI.

151. Sia di nuovo AF una curva qualunque, e l'altra AM sia tale, che la FM sia sempre eguale all' arco FA, ma questa curva AM non si consideri più relativamente all'asse interiore AP, come nell' esempio antecedente, ma bensì all' e-

all' esteriore AO. Già si è detto, esser la sua sottangente $PT = \frac{MP \times PG}{GF + PF}$, onde l' equazione alla curva AS sarà $OS = \frac{TP}{PM} = \frac{PG}{FG + PF}$, e la sua quadratura $rO \times OS = OM \times 1$ cioè eguale al prodotto dell' applicata OM in quella quantità costante, che si vuol moltiplicare nella formula $\frac{PG}{FG + PF} = OS$, a fine di determinare la lunghezza della detta OS. Data dunque la natura della curva AF, si può con essa sola costruire la curva AS, pigliando gli equivalenti della tangente, e sottangente ne' termini o d' ascissa, o d' ordinata, o d' amendue promiscuamente.

Corollario.

152. Quindi se la curva AF sarà un semicerchio, e l' altra AM in conseguenza una semicloide, siccome in questa la tangente TM è parallela alla corda AF (42.43.), ed è $\frac{TP}{PM} = \frac{AP}{PF}$, l' equazione alla curva AS sarà $OS = \frac{AP}{PF}$; il che fa il carattere d' una Versiera, che può dirsi *cicloidale*, perche costa di seni versi divisi per seni retti, applicati all' asse esteriore della cicloide, e che ha l' aree all' applicate esteriori di detta cicloide proporzionali.

Sco-

S c o l i o.

153. Osservisi generalmente, che quando la curva AM rivolgerà la convessità all' asse, la curva DN, o sarà asintotica, e la dimostrazione si riferirà alle *Figure* 24. 31., o non asintotica, e la dimostrazione si riferirà alle *Figure* 29. 30.; e qui di nuovo se l' area curvilinea trovata ANP supererà la metà del rettangolo APN, la dimostrazione si riferirà alla *Fig.* 29., ma se sarà superata dalla metà del detto rettangolo APN, la dimostrazione si riferirà alla *Fig.* 30.. In oltre quando la curva AM rivolgerà la concavità all' asse, e che la curva ritrovata DN sia asintotica, la dimostrazione si riferirà alla *Fig.* 33., e non essendo asintotica, alla *Fig.* 32.

PROPOSIZIONE XI.

154. *Essendo nota la natura d' una data curva, costruire, e quadrare un' altra curva, le di cui aree intorno all' asse comune siano proporzionali a' quadrati delle corrispondenti semiordinate della curva data.*

Sia la curva data AM (*Fig.* 55.), le di cui coordinate MP, ME estendansi in Q, F in maniera, che fatta EF $=$ MP, sia PT:PM::EF:PQ, e così sempre; dico, che sarà costrutta, e quadrata la curva ricercata.

Tirinsi le *mpq*, *mef* infinitamente prossime, e parallele alle MPQ, MEF. Per essere PT:PM::*mo* (P*p*):*o*M(E*e*), sarà ancora P*p*:E*e*::EF:PQ; onde E*e*$\times$EF$=$P*p*$\times$PQ; ma tutte le EF eguali alle PM, ed applicate alla EI formano

mano un triangolo rettangolo equicrure; dunque tutta l'area AQP essendo eguale ad un tal triangolo, eguaglierà la metà del quadrato della EI, cioè della PM, e sarà in conseguenza al quadrato di detta PM proporzionale; il che &c.

COROLLARIO I.

155. Per essere PT:PM::PM:PQ, l'equazione alla curva AQ sarà $PQ = \frac{\overline{PM}^2}{PT}$, onde sostituiti ne' casi speciali gli equivalenti in termini di AP, se ne conoscerà la natura.

COROLLARIO II.

156. Abbassata dal punto M la MS normale in M alla data curva AM, essendo la sunnormale $SP = \frac{\overline{PM}^2}{PT}$, se all'asse AP si applicherà in P la PQ eguale alla corrispondente sunnormale SP della data curva AM, si otterrà molto facilmente la costruzione della curva richiesta, la di cui quadratura sarà ancora $\frac{1}{2} SP \times PT$.

COROLLARIO III.

157. Se la EF non sarà eguale, ma proporzionale alla MP, la figura EFI sarà sempre un triangolo rettangolo, onde fatto $EF = nPM$, la curva AQ costrutta nel modo

divifato avrà lo fpazio AQP $= \frac{1}{2} n\overline{PM}^2$, e perciò farà tuttavia come il quadrato della femiordinata PM.

COROLLARIO IV.

158. Quindi fe intorno al medefimo affe AP (*Fig.* 10.) faranno più curve AM, AQ, AN, e che l'aree AQP, ANP fiano proporzionali al quadrato della femiordinata PM, queft'aree ftaranno fra loro come le bafi PQ, PN.

COROLLARIO V.

159. Quando adunque intorno ad un affe comune faranno fituate due curve tali, che l'aree d'una di loro, fappiafi, effere in ragion duplicata delle femiordinate corrifpondenti dell'altra curva, la prima curva farà fempre quadrabile; imperciocche fia AQ la curva data; defcritta con l'efpofto metodo la curva AN, la di cui area ANP $= \frac{1}{2} \overline{PM}^2$, indi alle tre quantità PN, PQ, $\frac{1}{2} \overline{PM}^2$, trovata la quarta proporzionale $\frac{PQ \times \overline{PM}^2}{2PN}$, quefta eguaglierà l'area data AQP.

Co-

COROLLARIO VI.

160. Se la EF (*Fig.* 55.) non più eguale alla semiordinata PM, ma facciasi una quantità costante qualunque, lo spazio curvilineo AQP costrutto con l'accennato metodo sarà per lo stesso raziocinio eguale al rettangolo EFC, e però starà come la IE, ovvero come l'applicata PM.

COROLLARIO VII.

161. L'equazione dunque alla curva AQ, le di cui aree stanno come l'applicate PM della curva AM, ambe adjacenti intorno l'asse comune AP, fatta la costante EF = 1, sarà $PQ = \frac{PM}{PT}$, e però surrogati gli equivalenti in termini di AP, se ne conoscerà a un punto istesso la natura, e la quadratura.

COROLLARIO VIII.

162. Quando dunque vi siano due Curve AQ, AM situate intorno ad un asse comune AP, l'una delle quali, cioè la AQ, abbia l'aree AQP proporzionali alle corrispondenti semiordinate PM dell'altra AM, l'aree AQP saranno sempre quadrabili; ma per ottenere tal quadratura conviene trovare la costante 1, per poi moltiplicarla nella semiordi-

nata PM; dunque per effervi l'analogia PT:PM::1:PQ, a riffi $1 = \frac{PQ \times PT}{PM}$; ficche la quadratura dell'area AQP farà PT×PQ; il che confronta con ciò, che con diverfo raziocinio fi è fuperiormente dimoftrato (78.).

Corollario IX.

163. Generalmente fe intorno alla bafe IB, ovvero per minor confufione intorno all'affe efteriore AK farà defcritto uno fpazio rettilineo, o curvilineo qualunque AVNR, indi prolungata la MR in N, facciafi la folita analogia TP: PM::RN:PQ, il natone fpazio curvilineo AQP farà per il medefimo raziocinio eguale alla figura AVNR.

Corollario X.

164. Sarà dunque facilmente ottenibile l'equazione generale alla nata curva AQ, data la natura della figura AVNR, qual'equazione farà $PQ = \frac{PM \times RN}{PT}$; onde effendo data la RN per la AR, cioè per la PM, e quefta per la AP, fi potrà, furrogati gli equivalenti, affegnar l'equazione alla PQ in termini di AP.

Co-

COROLLARIO XI.

165. Quindi la data figura AVNR rettilinea, o curvilinea si potrà trasformare con tal metodo in infinite curve diverse fra loro tanto nel genere, che nella specie, restando sempre costante la loro eguaglianza nel tutto, e nelle parti corrispondenti, e ciò col mutar continuamente la curva AMBI, ed assumerne un' altra a piacere di qualunque grado, e di qualunque carattere, la quale rivolga la convessità, o la concavità all' asse, ovvero abbia la base infinita, o finita, secondo la configurazione, che si vuol dare alla curva cercata AQ, la quale in conseguenza può essere adjacente all' ascissa AI, o a qualunque sua eguale, e parallela KB, di quella grandezza che si vuole, quando ancora esser debba infinita, ovvero può esser situata fra due asintoti IO, IA &c.

COROLLARIO XII.

166. Viceversa data la figura rettilinea, o curvilinea AQOI aderente all' asse AI di una qualunque curva AM, e fatto MP:PT::PQ:RN, ne nascerà la figura AVNR adjacente alla AR, che corrisponde alla semiordinata PM, ed eguale tanto in tutto, che in parte, alla data figura AQ; qual figura AVNR può trasformarsi anch' essa interminabilmente in diversissime figure, salva l' eguaglianza degli spazj, e ciò col mutar continuamente la curva AMB.

Co-

COROLLARIO XIII.

167. Si potrà dunque, quando si voglia, applicare al-la semiordinata quell' area rettilinea, o curvilinea, che era applicata all' ascissa corrispondente, e viceversa.

COROLLARIO XIV.

168. Se la curva AQ fosse l' istessa curva AM, allora per esser sempre PQ = PM, anche la EF, o la RN saranno eguali alla sottangente PT; sicche ancora le figure EFC, AVNR risultanti dalle sottangenti PT applicate alle BI, AK ne' luoghi congrui EF, RN, saranno eguali allo spazio curvilineo AMP; il che pure conferma le cose gia dimostrate (110. 111.).

COROLLARIO XV.

169. Essendo data la PT per la PM = AR, ancor l' equazione alla curva VND, che è $RN = \frac{PQ \times PT}{PM}$ sarà data in termini di RN, e di AR.

COROLLARIO XVI.

170. Se adattato sull' ascissa AI della curva AMB (*Fig. 56.*) il rettangolo AIYX, si farà l' analogia MP : PT :: AX : EF,

EF, e così sempre, l' equazione alla natane curva CF sarà $EF = \frac{PT}{MP}$; e l' area curvilinea ICFE sarà eguale al rettangolo corrispondente APQ; onde la detta area ICFE starà come l' ascissa AP, o come l' applicata esteriore RM.

COROLLARIO XVII.

171. Quando dunque sia noto, che l' aree d' una curva aderenti alla base BI parallela alle semiordinate PM di un' altra curva AMB, ovvero adjacenti al di lei asse esteriore AK, siano proporzionali all' ascisse corrispondenti AP di questa seconda curva, le dette aree saranno sempre quadrabili; imperciocchè essendo in tal caso la costante $AX = \frac{MP \times EF}{PT}$, la quadratura generale di tal curva CL sarà $\frac{MP \times AP \times EF}{PT}$.

COROLLARIO XVIII.

172. Se all' asse AI si applichi la PZ = AP, e così sempre, ne proverrà il triangolo AIY; fatta dunque l' analogia $MP : PT :: PZ : EF$, l' equazione alla curva risultatane CL sarà $EF = \frac{PT \times AP}{MP}$, e la sua quadratura sarà $\frac{1}{2}\overline{AP}^2$, onde lo spazio curvilineo ICFE starà come il quadrato dell' ascissa AP, o dell' applicata esteriore RM.

Co-

COROLLARIO XIX.

173. Quando anche la PZ non eguagliaſſe la AP, ma le foſſe proporzionale, lo ſpazio ICFE ſtarebbe nondimeno come il quadrato dell' aſciſſa AP, perche ſarebbe ſempre eguale al triangolo APZ.

COROLLARIO XX.

174. Sicche ſe intorno alla medeſima applicata PM, ovvero ſe intorno alle ſue eguali, e parallele AR, IE foſſero deſcritte con l' accennato metodo (172.173.) due ineguali ſpazj curvilinei AVNR, ICFE, ambi in ragion duplicata dell' aſciſſa AP, queſti ſpazj ſtaranno fra loro come le ſemiordinate RN, EF.

COROLLARIO XXI.

175. Quando dunque ſarà noto, che l'aree d'una curva CL adjacenti alla baſe BI parallela alle ſemiordinate PM d' un' altra curva AMB ſiano proporzionali a' quadrati dell' aſciſſe corriſpondenti AP di queſta ſeconda curva, l' aree nominate ſaranno ſempre quadrabili; imperciocche ſia CL la data curva, la di cui area ICFE ſtia come $\overline{AP}^2$; deſcritta la curva VND, la di cui area AVNR $= \frac{1}{2}\overline{AP}^2$, trovisi alle tre quantità RN, EF, $\frac{1}{2}\overline{AP}^2$ la quarta proporzionale $\frac{EF \times \overline{AP}^2}{2RN}$, che eguaglierà l' area data ICFE.

Co-

ESEMPIO I.

176 Sia all'infinite Parabole, ed Iperboli tra gli anſitoti l'equazione $AP = \overline{PM}^{n}$, (*Fig.* 55.) intendendo per n un numero qualunque intero, o rotto, poſitivo, o negativo, ſarà $\overline{PM}^{2} = \overline{AP}^{\frac{2}{n}}$; onde $PQ = \frac{\overline{PM}^{2}}{TP}$ (155.) $= \frac{\overline{PA}^{\frac{2}{n}}}{nAP} = \frac{\overline{AP}^{\frac{2}{n}-1}}{n}$; equazione alle Parabole quando $\frac{2}{n} > 1$; e all' Iperboli tra gli anſitoti quando $\frac{2}{n} < 1$.

COROLLARIO

177. Se dunque $n = 2$, ſarà $PQ = \frac{1}{2}$, cioè la figura AQP ſarà un rettangolo eguale al triangolo IEF.

Se $n = \frac{2}{3}$, ſarà $PQ = \frac{3}{2}\ AP^{\frac{2}{3}}$; equazione alla Parabola apolloniana riferita all'aſſe eſteriore; ſicchè l' equazione alla data curva AM (*Fig.* 57.) eſſendo $\overline{AP}^{3} = \overline{PM}^{2}$, l'area AQP di detta Parabola apolloniana AQ riferita all'aſſe eſteriore AP ſtarà, come $\overline{AP}^{3}$, il che è veriſſimo (57). Eſſendo poi la ſua quadratura aſſoluta $= \frac{1}{2}\overline{PM}^{2} = \frac{1}{2}\overline{AP}^{3} = \frac{1}{2}\overline{AP}^{2} \times AP$, ed eſſendo $\frac{1}{2}\ \overline{AP}^{2} = \frac{1}{3}PQ$, ſarà lo ſpazio parabolico eſteriore $AQP = \frac{1}{3}AP \times PQ$, il che confronta con la data miſura (85.)

Se

Se $n = 4$, sarà $PQ = \frac{1}{4}\,\overline{AP}^{-\frac{1}{2}}$, ovvero $\overline{PQ}^{2} = \frac{1}{16AP}$; equazione all' Iperbole cubica tra gli ansitoti, la di cui quadratura eguaglia $\frac{1}{2}\,\overline{PM}^{2}$; ma l' equazione alla data curva AM (*Fig*: 58.) è $AP = \overline{PM}^{4}$; dunque essendo $\frac{1}{2}\,\overline{AP}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\overline{PM}^{2}$, l' area di tal' Iperbole starà in ragion sudduplicata della sua ascissa AP, come dev' essere (*61.*); ma la sua quadratura assoluta è $\frac{1}{2}\,\overline{AP}^{\frac{1}{2}} = \frac{AP}{2\sqrt{AP}}$, ed è $\frac{1}{4\sqrt{AP}} = PQ$, e però $\frac{1}{2\sqrt{AP}} = 2PQ$; dunque sostituito questo valore, la detta quadratura assoluta dello spazio iperbolico AVQP sarà $2AP \times PQ$ coincidente con la già data (*89.*).

Se $n = -2$, sarà $PQ = -\frac{1}{2}\,\overline{AP}^{-2}$, ovvero $2AP = \frac{1}{\overline{PQ}^{\frac{1}{2}}}$; equazione ad un' Iperbole tra gli ansitoti, in cui il segno negativo, che precede l' ascissa AP, denota, che l' area quadrabile dev' essere presa dalla parte opposta al centro, cioè non l' area AVQP (*Fig.* 59.), ma l' area QDP, il che pure la genesi della curva ci dimostra; qual' area QDP eguagliando $\frac{1}{2}\,\overline{PM}^{-2}$, starà in ragione inversa dell' ascissa AP, perchè l' equazione alla data curva MN è $AP = \overline{PM}^{-2}$, ov-

ve-

vero $\overline{PM}^2 = \frac{1}{AP}$; la quadratura poi assoluta dell' area QDP essendo $= \frac{1}{2}\overline{PM}^2 = \frac{1}{2AP} = \frac{AP}{2AP^2}$ sostituiti i valori, diverrà PQ $\times$ AP; qual appunto si trovò superiormente (91.). &c.

ESEMPIO II.

178. Sia di nuovo l' equazione $AP = \overline{PM}^n$ ad infinite Parabole, ed Iperboli tra gli asintoti, sarà $PT = nAP$ (22.) $= n\overline{PM}^n$; onde avremo EF (Fig. 56.) $= \frac{PT \times AP}{PM}$ (172.) $= n\overline{PM}^{2n-1}$; equazione nuovamente alle Parabole quando $2n > 1$, e alle Iperboli tra gli asintoti quando $2n < 1$.

SCOLIO.

179. Quando con questo metodo si desideri la quadratura di una curva particolare tra l' infinite, che dà un' equazione generale, basta far l' equazione tra l' esponente generale, e il particolare, che possiede la curva proposta, e ricavarne il valore di n; così trattandosi di Parabole, se si volesse ridurre l' equazione generale $EF = n\overline{PM}^{2n-1}$ alla Parabola apolloniana, il di cui esponente è 2, facciasi $2n - 1 = 2$, e si avrà $n = \frac{3}{2}$, onde posto $\frac{3}{2}$ in luogo di n, sarà $EF = \frac{3}{2}\overline{PM}^2 = \frac{3}{2}\overline{IE}^2$, equazione alla prefissa Parabola.

Parimente se si bramasse la quadratura d' un' Iperbole tra gli asintoti del grado espresso per $^{-\frac{1}{7}}$, facciasi $2n - 1 = \frac{1}{7}$, si avrà $n = \frac{2}{7}$; posto dunque tal valore in luogo di n, si otterrà

$$EF = \tfrac{2}{7}\,\overline{IE}^{-\frac{1}{7}}.$$

Così facciasi nell' altre equazioni generali, che può dare tanto il presente metodo, che qualunque altro incluso ne' Corollarj della presente proposizione; la quadratura poi più netta, e più comoda, che si deve cercare sulle variabili della proposta Figura, si trovi con un ripiego simile a quello usato nel Corollario dell' Esempio antecedente.

E s e m p i o III.

180. Sia AM (*Fig.* 55.) una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI; sarà PT:PM::AP:PG (42.43.), onde posta la costante EF $=1$, facciasi incessantemente AP: PG::1:PQ, sarà PQ $= \frac{PG}{AP}$; equazione ad una Versiera, la di cui quadratura eguaglia il prodotto della semiordinata PM nella presa quantità costante (160.).

Corollario. I.

181. Giacche gli spazj di questa curva stanno come le corrispondenti applicate della cicloide, vedesi, che ella è la Versiera Grandiana più volte nominata (29.95.96.137.), di cui rendesi facilissima la costruzione.

Co-

COROLLARIO II.

182. Supposto, che la curva AQ sia una Versiera Grandiana, il di cui semicerchio genitore AGI, se viceversa si facesse PG:AP::PQ:RN, la nata figura AVNR eguaglierebbe l' area corrispondente AQP (*166.*); ma la RN è una quantità costante, perchè eguaglia $\frac{PQ \times AP}{PG}$, ed è PQ $= \frac{PG}{AP}$; dunque la figura AVNR sarebbe in questo caso un rettangolo, ed in conseguenza l' area AQP eguaglierebbe il prodotto della semiordinata PM in una quantità costante, come gia si avvertì (95.), e di nuovo si conoscerebbe, che è proporzionale alla detta semiordinata cicloidale PM.

ESEMPIO IV.

183. Sia AM (*Fig.* 56.) replicatamente una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI, e presa AX per costante, facciasi nuovamente PG:AP::1:RN, e così sempre, si avrà RN $= \frac{AP}{PG}$; equazione alla curva VN chiamata da me poco anzi (152.) Versiera Cicloidale, la quale è reciproca alla Versiera precedente, e quadrabile (170.), giacche lo spazio AVNR eguaglia il prodotto del corrispondente seno verso AP nella presa costante AX.

Co-

Corollario

184. Gli ſpazj dunque di queſta Verſiera ſtanno come l' applicate RM all' aſſe eſteriore della cicloide, il che conſronta con le coſe gia dette (151. 152.).

Esempio V.

185. Sia da capo AM (*Fig.* 55.) una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI, e facciaſi continuamente AP : PG : : PM : PQ, ne naſcerà la curva AQ, che chiamerò *Verſiera Ciclo-cicloidale*, per aver l' equazione $PQ = \frac{PG}{AP} \times PM$, e la di cui quadratura è $\frac{1}{2}\overline{PM}^2$.

Corollario

186. L' area dunque AQP di queſta curva è proporzionale al quadrato della ſemiordinata cicloidale PM.

Esempio VI.

187. Sia tuttavia AM (*Fig.* 56.) una cicloide, il di cui cerchio genitore AGI, e facciaſi PG : AP : AP : RN; ne riſulterà la curva VN, che ſarà una verſiera cicloidale del ſecondo grado, la di cui equazione $RN = \frac{\overline{AP}^2}{PG}$, e la di cui quadratura è $\frac{1}{2}\overline{AP}^2 = \frac{1}{2}\overline{RM}^2$ (172).

Co-

COROLLARIO

188. Dunque l' area di queſta curva è proporzionale al quadrato della corriſpondente applicata all' aſſe eſteriore della cicloide.

ESEMPIO VII.

189. Sia la curva AOM (*Fig.* 39.) compreſa nell' infinite Parabole, l'equazione delle quali è generalmente $AP = \overline{PM}^n$, intendendo al ſolito per *n* qualſivoglia numero poſitivo intero, o rotto; e la curva PQN paſſi per l'eſtremità di tutte le MN, RQ applicate alla ſemiordinata PM, ed eguagli alle ſottangenti corriſpondenti PT, &c. Per eſſere ogni ſottangente $PT = nAP$ (22.) $= n\overline{PM}^n$, l' equazione alla curva NQ ſarà $MN = n\overline{PM}^n$; vale a dire la figura PNM eguale all' area parabolica AMP (110. 168.) ſarà ſempre anch' eſſa una Parabola del medeſimo ordine, e del medeſimo parametro moltiplicato per *n*, ma rivolta con la conveſſità all' aſſe PM, quando l' altra Parabola rivolga la concavità all' aſſe AP, e viceverſa.

Co-

Corollario

190. Dunque data un' area Parabolica AOB aderente all'asse AB, se ne potrà costruire un' altra PQR del medesimo grado, aderente alla semiordinata $BO = PR$, che tanto riguardo al tutto, che alle parti corrispondenti eguagli la prima.

Esempio VIII.

191. Sia la curva BM (*Fig.* 60.) compresa nell'equazione $AP = \overline{PM}^{-n}$, che è all' infinite Iperboli tra gli asintoti, e la curva ND nasca dall' estremo contatto di tutte le sottangenti PT, *pt* applicate all'asintoto AR ne' luoghi congrui, cioè delle RN, *rn*. Essendo ogni sottangente $PT = -n\,AP$ (26.) $= -n\,\overline{PM}^{-n}$, l'equazione alla curva ND sarà $RN = -n\,\overline{PM}^{-n}$; ovvero $AQ = -n\,\overline{QN}^{-n}$; il che dimostra, che la curva ND è anch'essa un' Iperbole tra gli asintoti del medesimo rango, che tiene la BM, ma a causa del segno negativo deve avere una posizione contraria a quella dell' Iperbole BM, come mostra la figura, e come insegna la costruzione.

Co-

COROLLARIO

192 Data dunque un'area Iperbolica ABMR adjacente ad una retta RM parallela, ed eguale all'aſciſſa AP; ſe ne può coſtruire un'altra ADNR del medeſimo grado, adjacente alla AR parallela, ed eguale alla ſemiordinata PM in maniera, che ſia ſempre tanto riguardo al tutto, che alle parti corriſpondenti, eguale alla dett'area ABMR.

ESEMPIO IX.

193. L'equazione alla curva AM (*Fig.* 55.) ſia $AP = \overline{PM}^{n}$, cioè ad infinite Parabole, e la curva AQ ſia compreſa nell'equazione $\overline{PQ}^{m} = AP \pm \overline{AP}^{2}$, che col ſegno affermativo è ad infinite Iperboli, e col negativo ad infiniti cerchj; per eſſere $AP \pm \overline{AP}^{2} = \overline{PM}^{n} + \overline{PM}^{2n}$, avremo $RN = \frac{PT \times PQ}{PM}$ (166.) $= n\overline{AR}^{n-1} \times \left(\overline{AR}^{n} \pm \overline{AR}^{2n}\right)^{\frac{1}{m}}$; onde $\overline{RN}^{m} = n^{m}\overline{AR}^{mn-m+n} \pm n^{m}\overline{AR}^{mn-m+2n}$,

COROLLARIO

194. Quindi ſe $n = m = 2$, cioè ſe la curva AM ſarà una Parabola apolloniana, e AQ un cerchio, o un Iperbole equilatera, l'equazione alla curva VN, ch' eguaglia nell'

aree AVNR l'aree AQP, sarà $\overline{RN}^{2} = 4\,\overline{AR}^{4} \pm 4\,\overline{AR}^{6}$.

Se $m = 2$, $n = 3$, sarà $\overline{RN}^{2} = 9\,\overline{AR}^{7} \pm 9\,\overline{AR}^{10}$.

Se $m = n = 3$, sarà $\overline{RN}^{3} = 27\,\overline{AR}^{9} \pm 27\,\overline{AR}^{12}$.

Se $m = 3$, $n = 2$, sarà $\overline{RN}^{3} = 8\,\overline{AR}^{5} \pm 8\,\overline{AR}^{7}$.

Esempio X.

195. Ritenuta l' equazione $AP = \overline{PM}^{n}$ riguardo alla curva AM, piglisi rispetto alla curva VN l'equazione $\overline{RN}^{m} = AR \pm \overline{AR}^{2}$; sarà $PQ = \frac{PM \times RN}{PT}$ (164.) $= \frac{1}{n}\overline{AP}^{\frac{1-n}{n}} \times \left(\overline{AP}^{\frac{1}{n}} \pm \overline{AP}^{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{m}}$; onde $\overline{PQ}^{m} = \frac{1}{n^{m}}\,\overline{AP}^{\frac{1+m-mn}{n}} \pm \frac{1}{n^{m}}\,\overline{AP}^{\frac{2+m-mn}{n}}$

Corollario

196. Quindi se $m = n = 2$, sarà $\overline{PQ}^{2} = \frac{1}{4}\,\overline{AP}^{-\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{4}$.

Se $m = 2$, $n = 3$, sarà $\overline{PQ}^{2} = \frac{1}{9}\,\overline{AP}^{-1} \pm \frac{1}{9}\,\overline{AP}^{-\frac{2}{3}}$.

Se $m = n = 3$, sarà $\overline{PQ}^{3} = \frac{1}{27}\,\overline{AP}^{-\frac{5}{3}} \pm \frac{1}{27}\,\overline{AP}^{-\frac{4}{3}}$.

Se $m = 3$, $n = 2$, sarà $\overline{PQ}^{3} = \frac{1}{8}\,\overline{AP}^{-1} \pm \frac{1}{8}\,\overline{AP}^{-\frac{1}{2}}$.

Co-

S C O L I O.

197. Da questi due ultimi Esempj, e da altri, che potrebbonsi addurre, comprendesi agevolmente, che un' equazione si può innalzare, salva l'area, che rappresenta, a gradi superiori, e viceversa; e ciò in infiniti modi, trasformando continuamente l'area curvilinea data, come già si disse (*165. 166.*).

PROPOSIZIONE XII.

198. *Costruire intorno ad un asse comune, e quadrare una Figura, le di cui aree siano in ragione qualunque moltiplicata, o summoltiplicata diretta, o inversa delle coordinate, ovvero dell' applicate d'una data curva, tanto dalla parte concava, che dalla convessa.*

N. I. Intorno alla retta AK (*Fig. 63. 64. 65. 66. 67.* 68.) normale in A all'asse AP della data curva MB descrivasi una curva NL, la di cui equazione sia generalmente $RN = \overline{AR}^{m}$ (intendendo per *m* un numero qualunque intero, o rotto; positivo nelle Figure *63. 65. 67.*, nel qual caso la detta equazione sarà all' infinite Parabole; negativo nelle Figure *64. 66.* 68., ed allora l' equazione sarà all'infinite Iperboli tra gli Assitoti); indi per la Proposizio-

ne X. (140.) costruiscasi la Figura AKDF tale, che le sue aree AFOR (*Fig.* 63. 65. 67.), RKDO (*Fig.* 64. 66. 68.) siano proporzionali all' applicate RN, e prolunghinsi le applicate ONR, FLG fino a i contatti in M, H della data curva MB. Tirata poscia la tangente MT, e fatta l' analogìa PT: PM:: RO: PQ, e così sempre, costruiscasi in tal guisa la Figura ZPQ; dico, che l' area PZQ sarà in ragione moltiplicata, o summoltiplicata diretta (*Fig.* 63. 65. 67.), o inversa (*Fig.* 64. 66. 68.) dell'applicata PM.

Imperciocchè essendo AR=PM, la RN starà come le potenze positive (*Fig.* 63. 65. 67.), o negative (*Fig.* 64. 66. 68.) dell' applicata PM; onde in ragione di tali potenze starà ancora l'area AFOR (*Fig.* 63. 65. 67.), ovvero RKDO (*Fig.* 64. 66. 68.); ma l'area PZQ eguaglia l' area AFOR (*Fig.* 63. 65. 67.), ovvero RKDO (*Fig.* 64. 66. 68.) per le cose dimostrate (163.): dunque l'area PZQ starà direttamente (*Fig.* 63. 65. 67.), o inversamente (*Fig.* 64. 66. 68.) in qualunque ragione moltiplicata, o summoltiplicata della corrispondente applicata PM. Tirata poi la tangente Nr, la quadratura di dett' area PZQ sarà generalmente rR×RO (81. 163.); il che dimostra la prima parte.

N. 2. Vicendevolmente preso AK per asse, intorno alla retta AP normale in A alla AK descrivasi una curva XY, la di cui equazione sia generalmente $PX = \overline{AP}^{m}$ (intendendo come sopra per *m* un numero qualunque intero, o rotto; positivo nelle *Fig.* 63. 65. 68. negativo nelle *Fig.* 64. 66. 67.), indi per la Proposizione X. (140.) costrutta la *Fig.* ZQP tale, che le sue aree PZQ siano proporzionali all' applicate PX, prolunghinsi

ſi le XP fino al contatto in M della data curva MB e da punti M condotte le indefinite MRO parallele all'AP, e tirata la tangente MT, facciaſi PM : PT : : PQ : RO, e così da per tutto in maniera che venga a coſtruirſi la figura AKDO; dico, che tal figura averà l'aree in ragione moltiplicata, o ſummoltiplicata diretta, o inverſa delle corriſpondenti applicate RM.

La dimoſtrazione è ſimile alla precedente, e la quadratura di detta figura AKDO ritrovaſi con l'iſteſſo metodo; onde reſta dimoſtrata ancora la ſeconda parte, e tutta in conſeguenza la Propoſizione.

In altra maniera.

N. 3. Troviſi (74.) la curva XY, le di cui applicate PX ſtiano direttamente (*Fig.* 63. 65. 67.), o inverſamente (*Fig.* 64. 66. 68.) come le potenze di qualunque genere dell'applicate corriſpondenti PM; indi coſtrutta (140.) la curva QS, le di cui aree PZQ ſiano proporzionali all'applicate corriſpondenti PX; è manifeſto, che l'aree PZQ ſaranno direttamente (*Fig.* 63. 65. 67.), o inverſamente (*Fig.* 64. 66. 68.) proporzionali alle potenze dell'applicate PM della data curva AM; e che condotta la tangente X*a*, la quadratura dell'area PZQ ſarà (81.) *a*P$\times$PQ; il che dimoſtra la prima parte.

N. 4. Troviſi ora (74.) la curva NL, le di cui applicate RN ſiano direttamente (*Fig.* 63. 65. 68.), o inverſamente (*Fig.* 64. 66. 67.) come le potenze dell'applicate corriſpondenti RM; poſcia coſtrutta (140.) la curva FD, le di cui aree AFOR (*Fig.* 63. 65. 67.), ovvero RKDO

(*Fig.*

(*Fig.* 64. 66. 68.) ſtiano come l' applicate corriſpondenti RN della detta curva NL; è manifeſto, che l'aree AFOR (*Fig.* 63. 65.) RKDO (*Fig.* 68.) ſaranno direttamente, e l' aree RKDO (*Fig.* 64. 66.), AFOR (*Fig.* 67.) inverſamente proporzionali alle potenze dell' applicate RM; e che tirata la tangente N*r*, la quadratura dell' area AFOR (*Fig.* 63. 65. 67.), ovvero dell' area RKDO (*Fig.* 64. 66. 68.) ſarà $rR \times RO$; il che dimoſtra la ſeconda parte; onde tutta reſta dimoſtrata la Propoſizione.

COROLLARIO I.

199. L' equazione dunque alla curva QS riguardo al *N.* 1. ſara $PQ = \frac{PM \times RO}{PT}$; ſicchè eſſendo $RO = \frac{RN}{Rr}$ (140.) $= \frac{m\overline{AR}^{m}}{AR} = m\overline{PM}^{m-1}$, avremo $PQ = \frac{m\overline{PM}^{m}}{PT}$; onde ſurrogati i valori, ſi potrà avere non ſolo l' equazione alla PQ in ſoli termini di AP, quanto ancora un' altra coſtruzione della curva QS.

COROLLARIO II.

200. Eſſendo riguardo al *N.* 3. di queſta dimoſtrazione $PX = \overline{AR}^{m}$, ed eſſendo data AR, ovvero PM per AP, s' avrà l' equazione alla PX in ſoli termini di AP;

on-

onde condotta la tangente Xa (17.), un'altra equazione alla curva QS farà $PQ = \frac{PX}{aP}$ (140.) $= \frac{\overline{PM}^{m}}{aP}$.

Corollario III.

201. Per essere $\frac{\overline{PM}^{m}}{aP} = \frac{m\overline{PM}^{m}}{PT}$, farà $aP = \frac{PT}{m}$, onde per la quadratura dell' area PZQ si avrà $aP \times PQ = \frac{PT}{m} \times PQ$.

Corollario IV.

202. Se invece di PQ si ponga il suo valore $\frac{m\overline{PM}^{m}}{PT}$, avremo $aP \times PQ = \overline{PM}^{m}$; quindi l'equazione alla curva QS farà nuovamente $PQ = \frac{m\overline{PM}^{m}}{PT}$; riscontri amendue, che giustificano l'esattezza de' fatti ragionamenti.

Corollario V.

203. L'equazione poi alla curva FD riguardo al *N.* 2. farà $RO = \frac{PT \times PQ}{PM}$; ma è $PQ = \frac{PX}{aP}$ (140.) $= m\overline{AP}^{m-1}$; dunque avremo $RO = \frac{m\overline{AP}^{m-1} \times PT}{PM}$; sicchè dalla data equazione alla cur-

va

va MB ricavati, e sostituiti gli equivalenti in termini di PM, ovvero di AR, si otterrà non solo l'equazione, quanto ancora la costruzione della curva ricercata DF,

COROLLARIO VI.

204. Essendo RN = PX, l'equazione alla curva NL riguardo al N. 4. sarà $RN = \overline{AP}^{m}$; giacche dunque è data AP per PM, ovvero AR, s'avrà l'equazione alla curva NL in soli termini di AR; ed un'altra equazione alla curva DF sarà $RO = \frac{RN}{Rr}$ (140.) $= \frac{\overline{AP}^{m}}{Rr}$.

COROLLARIO VII.

205. Siccome $\frac{\overline{AP}^{m}}{Rr} = \frac{m\overline{PA}^{m} \times PT}{AP \times PM}$ (203.), se ne deduce $Rr = \frac{AP \times PM}{mPT}$; onde la quadratura della curva DF sarà $\frac{AP \times PM \times RO}{mPT}$,

COROLLARIO VIII.

206. Quindi ricaverassi $RO = \frac{mPT \times \overline{AP}^{m-1}}{PM}$ come prima (203.), e nell'equazione $Rr \times RO = \frac{AP \times PM \times RO}{mPT}$ posto in

vece di RO queſto valore $\frac{m\overline{AP}^{m-1} \times PT}{PM}$, ſi otterrà $Rr \times RO = \overline{AP}^{m} = \overline{RM}^{m}$; quali due congruenze ſervono di riprova alle fatte operazioni, per renderle ſicure.

Corollario. IX.

207. Se l'area AFOR (*Fig.* 63. 65. 67.) doveſſe ſtare come l' applicata PM, è evidente che tutta la figura ſarebbe un rettangolo, e ſe la dett' area AFOR doveſſe ſtare come il quadrato dell'applicata PM, tutta la figura ſi convertirebbe in un triangolo rettangolo; onde in amendue i caſi la figura AQP ſarebbe facilmente quadrabile; il che già s'avvertì (154. 160. 170. 172.). &c.

Corollario X.

208. Sarà generalmente riducibile a dimenſione qualunque ſpazio curvilineo, quando ſappiaſi, che le ſue aree ſituate intorno ad un aſſe comune con un'altra curva ſtiano in qualſivoglia ragione moltiplicata, o ſummoltiplicata, diretta, o inverſa dell' applicate sì interne, che eſterne di queſta ſeconda curva; imperciocchè ſe ſia noto, che l'area PZQ della curva QS ſtia in ragione moltiplicata, o ſummoltiplicata diretta, o inverſa delle potenze, alle quali è innalzata l'applicata PM della data curva MB, la di cui ſottangente

PT sia cognita, la quadratura di dett' area sarà $\frac{PT}{m} \times PQ$ (201.); e se l'area AFOR (*Fig. 63. 65. 67.*), ovvero RKDO (*Fig. 64. 66. 68.*) della curva FD sia nell'istesso caso riguardo all'applicata RM della data curva MB, la sua quadratura sarà $\frac{AP \times PM \times RO}{mPT}$ (205.).

S C O L I O.

209. Non bisogna per altro dimenticarsi, che la quantità *m* và accompagnata col segno positivo, quando si tratta di trovare l'equazione ad un'area, che stia direttamente come le potenze dell'applicata interna, o esterna d'una data curva. Viceversa poi deve esser unita al segno negativo, quando si vuol trovar l'equazione ad una figura, che stia reciprocamente come le potenze dell'applicata interna, o esterna della data curva.

E S E M P I O I.

210. Sia MB (*Fig. 63. 65. 67.*) una curva compresa nell'equazione $AP = \overline{PM}^{n}$, cioè ad infinite Parabole quando *n* è positivo, e ad infinite Iperboli tra gli assintoti quando è negativo; s' avrà $PT = nAP = n\overline{PM}^{n}$; onde l'equazione alla curva QS sarà $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{m-n}$ (199.).

Co-

COROLLARIO I.

211. Se m, n sono amendue positivi, la formula resta $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{m-n}$; se m, n saranno amendue negativi, sarà l'equazione $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{n-m}$; se m è positivo, n negativo, dirà l'equazione $PQ = -\frac{m}{n} \overline{PM}^{m+n}$; se m è negativo, n positivo, l'equazione dirà $PQ = \frac{m}{n} \overline{PM}^{-m-n}$.

COROLLARIO II.

212. Se dunque AM (*Fig.* 63.) fosse una Parabola Apolloniana, e si volesse fare adjacente al suo asse AP una figura AIS tale, che le sue aree AQP stiano come i cubi dell'applicate PM, fatto $m = 3$, $n = 2$, si avrà $PQ = \frac{3}{2} PM = \frac{3}{2} \sqrt{AP}$; qual'equazione essendo nuovamente alla Parabola Apolloniana, indica, che le sue aree stanno come i cubi delle sue ordinate; il che è verissimo, perche stando l'area AMP come $AP \times PM$ (55.), starà, fatta la sostituzione, come $\overline{PM}^3$ (57.).

La quadratura poi di tal Parabola ritrovata, che rivolge la concavità all'asse, sarà $\frac{2}{3}$ AP$\times$PQ (201.), come appunto deve essere.

COROLLARIO III.

213. Sia AM nuovamente una Parabola Apolloniana, e la figura AIS sia tale, che l'area AQP stia come la quarta potestà di PM, fatto $m = 4$, $n = 2$, s' avrà PQ $= 2\overline{PM}^2 = 2AP$; dal che deducesi, che l'area AQP sarà un triangolo, il che è verissimo; imperciocchè essendo $\overline{AP}^2 = \overline{PM}^4$, a volere, che la figura APQ stia come la quarta potestà di PM, bisogna, che stia come il quadrato di AP, e perciò deve essere un triangolo, la di cui misura è $\frac{1}{2}$ AP$\times$PQ come appunto ricavasi dagli Elementi.

COROLLARIO IV.

214. Se MB (*Fig.* 68.) fosse un' Iperbole cubica tra gli asintoti, la di cui equazione AP $= \overline{PM}^{-2}$, e si volesse, che una figura PAQ aderente al suo asse AP avesse l'aree inversamente proporzionali al quadrato di PM, fatto $m = -2$, $n = -2$, sarà PQ $= 1$, il che dà a conoscere, dover la figura APQ essere un rettangolo, la di cui misura è AP$\times$PQ; il che pure è verissimo.

Co-

COROLLARIO V.

215. Sia la curva MB (*Fig. 64.*) una Paraboloide, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^{\frac{3}{2}}$, e si debba trovare una figura, le di cui aree siano reciproche alle quinte potestà delle sue applicate PM; avremo $m = -5$, $n = \frac{3}{2}$; onde sarà $PQ = -\frac{10}{3}\overline{PM}^{-\frac{13}{2}}$ (211.) $= -\frac{10}{3}\overline{AP}^{-\frac{13}{3}}$; equazione ad una delle Iperboli tra gli asintoti; sicchè essendo questa la curva QS tra gli asintoti AV, AZ, la di lei area PZQ soddisfarà, come insegna la costruzione, al quesito; e la sua quadratura sarà $\frac{3}{10}$ AP×PQ, come deve essere (92.).

SCOLIO.

216 Osservisi, che trattandosi di Parabole, e d' Iperboli tra gli asintoti, se nell'equazione alla curva QS annessa a tal categoria si piglierà inversamente il coefficiente dell' ascissa AP, e si moltiplicherà nel prodotto delle coordinate, si avrà sempre la quadratura della detta curva QS trovata.

ESEMPIO II.

217. Sia AM (*Fig. 69.*) una Cicloide ordinaria, il di cui cerchio genitore AGI; siccome in essa l' applicata MP stà

stà alla sottangente PT, come PG: AP (42. 43.), l' equazione alla curva QS sarà $PQ = \frac{PG \times \overline{PM}^{m-1}}{AP}$, cioè ad infinite Versiere; onde se l'area AVPQ dovrà stare come la PM, sarà $m = 1$, e l'equazione alla curva QS sarà $PQ = \frac{PG}{AP}$, cioè alla Versiera Grandiana (181.), che si potrà chiamare Ciclo-cicloidale del prim' ordine; ma se l'area AVQP dovrà stare come il quadrato della PM, sarà $m = 2$, e l'equazione alla curva QS dirà $PQ = \frac{PG}{AP} \times PM$, cioè sarà alla Versiera Ciclo-cicloidale del second' ordine (185.) &c. Se la figura AVQP dovrà stare in ragione inversa delle potenze della PM, l' equazione alla curva QS sarà $PQ = \frac{PG \times \overline{PM}^{-m+1}}{AP} = \frac{PG}{AP \times PM^{m-1}}$ (209.), cioè ad infinite Versiere Ciclo-cicloidali d'altra specie.

Essendo poi $\frac{PT}{m} \times PQ$ la dimensione generale della figura AVQP (201.), questa dimensione nel presente caso sarà $\frac{AP \times PM \times PQ}{mPG} = \frac{\overline{PM}^m}{m}$.

COROLLARIO I.

218. Se la figura AOR dovesse esser proporzionale all' applicata PM, sarebbe un rettangolo (207.), onde la Versiera AVQP descritta con tal rettangolo li sarebbe eguale riguardo all' area (180.), quale varierà continuamente al va-

variare della costante RO, dimodochè se fatto C centro del cerchio AGI, e condotte le CG, GI, fosse RO $=$ AC, la Versiera QS costrutta sul detto rettangolo eguaglierebbe nella sua area AVQP il doppio del settore circolare corrispondente AIG, il che concorda con la data misura (96. 137.).

COROLLARIO II.

219. Se la figura AOR dovesse esser proporzionale al quadrato dell'applicata PM, sarebbe un triangolo (207.), e perciò la Versiera QS costrutta sù tal triangolo, e che l'eguaglierà nell'area AVQP, muterà d'area continuamente al cangiarsi della RO. Che se fosse RO $=$ RA, cioè se il triangolo rettangolo AOR fosse equicrure, l'area AVQP della detta Versiera QS sarebbe eguale alla metà del quadrato della PM, come deve essere (154.).

ESEMPIO III.

220. Sia nuovamente AM una Cicloide ordinaria, il di cui cerchio genitore AGI, l'equazione alla figura AOR, che abbia l'aree direttamente, o inversamente proporzionali alle potenze delle corrispondenti ordinate RM, sarà RO $=$ $\frac{m\overline{AP}^{m-1} \times PT}{PM}$ (203.) $= \frac{m\overline{AP}^{m}}{PG}$ (42. 43.); equazione ad infinite Versiere Cicloidali quando m è positivo; onde se l'area AOR dovrà stare come la RM, sarà $m = 1$, e l'equazione alla curva AO sarà RO $= \frac{AP}{PG}$, cioè alla Versiera Cicloi-

cloidale (152. 183.) del primo grado; che se $m = 2$;

l'equazione dirà $RO = \frac{\overline{2AP}^{2}}{PG}$, e sarà alla Versiera Cicloidale del secondo grado (187.); ma se m fosse negativo, l'equazione generale alla curva AO sarebbe $RO = \frac{{}^{-m}}{PG \times \overline{AP}^{m}}$, cioè ad infinite Versiere Cicloidali d'altra specie.

La quadratura poi generale della figura AOR essendo $\frac{AP \times PM \times RO}{mPT}$ (205.), discorrendosi delle prime Versiere, sarà $\frac{PG \times RO}{m} = \overline{AP}^{m}$.

S C O L I O.

221. Se si riguarderà la Cicloide dalla parte convessa; come nella positura indicata dalla figura 65., dimodoche sia riferita al suo asse esteriore AP; e per la sua sottangente si consideri la PT, si ricaveranno i medesimi valori notati in quest'Esempio, tanto riguardo all'equazione della ricercata curva in questione, quanto alla sua quadratura; onde ancora col metodo esposto nel *N.* 1. della dimostrazione della proposizione presente può essere sciolto il Problema, che sciogliesi col metodo del *N.* 2.; e viceversa. E quì noterò di passaggio, che v'è tra certe classi di curve una connessione, ed una specie, per così dirla, di anastomosi maravigliosa, il che riscontrasi dalle ultime antecedenti proposizioni, le quali hanno il loro uso anche nella Dinamica, come spero di far vedere quando ne tratterò relati-

tivamente al mio fine. Intanto si passi ad un nuovo, e facilissimo metodo per costruire, e quadrare le curve, esposto nella seguente Proposizione e ne' suoi Corollarj.

PROPOSIZIONE XIII.

222. *Sommare due aree rettilinee, o curvilinee d'eguale altezza, cioè costruire una figura, che nella sua area eguagli la loro somma.*

Siano due figure, una rettilinea ABC (*Fig.* 70.), ed una curvilinea ADC intorno alla comune altezza AC, che posino in conseguenza sovra la base BD. Risoluta l'intera figura AMDB ne' suoi elementi BD, NM &c. paralleli alla base, e perciò perpendicolari all'asse comune AC, si prolunghino le CD, PM in maniera, che sia DE = BC, MQ = PN, e così da per tutto; il risultato di tali somme sarà l'area AQEC eguale manifestamente alle due aree ADC, ACB; imperciocche essendo per la costruzione la MQ eguale alla contrapposta PN, la DE eguale alla contrapposta BC, e così discorrendo di tutti gli altri elementi equinumerici, tutta l'area AMDEQA sarà eguale a tutta l'area ACB; onde posta di comune l'area ADC, sarà l'area AQEC eguale all'aree ADC, ACB; il che &c.

SCOLIO I.

223. Che l'area AMDEQA eguagli l'area ACB, si può dimostrare ancora coll' eccellente metodo delle infinita-

mente proſſime; imperciocche tirata alla NPMQ l'infinitamente proſſima *npmq*, ſi dimoſtrerà facilmente, eſſere ogni areola M*mq*Q eguale all'areola corriſpondente PN*np*, e in conſeguenza tutta l'area AMDEQA eguale a tutta l'area ACB.

COROLLARIO I.

224. Se ſaranno due o più aree curvilinee, ovvero più aree rettilinee, e curvilinee dell'iſteſs' altezza, è chiaro, che ſi potrà coſtruire col medeſimo facil metodo un'area eguale alla loro ſomma.

COROLLARIO II.

225. Quindi ravviſaſi, eſſer ancora molto facile il coſtruire una figura, la di cui area ſia la differenza di due, o più aree rettilinee, e curvilinee date, che abbiano la medeſima altezza; imperciocche ſiano le figure ACB, AEC intorno all'aſſe comune AC; riſolvanſi ne'loro elementi, o componenti BE, NQ, e dalla EC tolta la ED = BC, come ancora reciſa dalla PQ la QM = PN, e così ſempre, rimarrà la figura AMDC, che ſarà la differenza delle date figure AEC, ACB.

COROLLARIO III.

226. E' dunque faciliſſimo il trovar l'equazione alla figura curvilinea inſorta dal ſommare, o ſottrarre più figu-

re

re rettilinee, e curvilinee di nota equazione, le quali abbiano la medesima altezza; imperciocche se la figura AEC sarà la somma delle figure ADC, ACB, avremo CE $=$ BC$+$CD; e se la figura ADC è la differenza delle figure AEC, ACB, s'avrà CD $=$ CE $-$ CB; quali due equazioni, quantunque sembrino a prima vista ridicole, portano ad inaspettate conseguenze.

COROLLARIO IV.

227. In fatti data la natura delle figure ADC, ACB, e sostituiti all'applicata CE i valori in termini della corrispondente ascissa AC, si avrà l'equazione alla nata figura AEC, la di cui quadratura s'otterrà sempre, quando quadrabili siano le due figure componenti ADC, ACB. Così se ACB sia un triangolo rettangolo isoscele, e la AMD una Parabola Apolloniana rivolta con la concavità all'asse, l'equazione alla curva AE in caso di somma sarà CE $=$ AC$+\sqrt{AC}$, ovvero PQ$=$AP$+\sqrt{AP}$; e in caso di differenza l'equazione alla curva AD sarà PM$=$AP$-\sqrt{AP}$, supposto, che la curva AE sia una Parabola Apolloniana concava verso l'asse AC. Che se la detta Parabola AD rivolgesse la convessità all'asse AC, allora l'equazione alla curva AE in caso di somma sarebbe PQ $=$ AP$+\overline{AP}^2$; e se la Parabola del medesimo genere AE fosse convessa verso il medesimo asse, l'equazione alla curva AD in caso di differenza sarebbe PM $=$ AP$-\overline{AP}^2$; onde la quadratura della curva AE

 nel

nel primo caſo di ſomma ſarebbe $\frac{1}{2}\overline{AP}^{2} + \frac{2}{3}\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$ (109. 57.), nel ſecondo $\frac{1}{2}\overline{AP}^{2} + \frac{1}{3}\overline{AP}^{3}$ (85. 57.); e la quadratura della curva AD nel primo caſo di differenza ſarebbe $\frac{1}{2}\overline{AP}^{2} - \frac{2}{3}\overline{AP}^{\frac{1}{2}}$, nel ſecondo $\frac{1}{2}\overline{AP}^{2} - \frac{1}{3}\overline{AP}^{3}$. Il medeſimo contegno ſi uſi quando le figure ſommabili, o ſottraibili ſono più di due.

COROLLARIO V.

228. Per coſtruir dunque una data equazione, baſta ſupporre, che ciaſcun membretto, che la forma, ſia eguale ad un'applicata; indi poſte tali applicate per diritto in maniera, che formino una retta, facciaſi, che tal retta ſia normale ne' luoghi congrui ad una comune aſciſſa, e così ſempre; queſta retta toccherà con l'eſtremità la curva richieſta; ex. gr. ſia la data equazione $PQ = AP + \sqrt{AP}$; facciaſi $PN = AP$, che ſarà al triangolo rettangolo iſoſcele APN, poſcia proſeguiſcaſi a fare $PM = \sqrt{AP}$, che ſarà alla Parabola Apolloniana, ſicche poſta la $MQ = PN$ per diritto alla PM, e formatane la PQ normale alla comune aſciſſa AP, queſta PQ ſarà un' applicata, ovvero un' elemento della curva richieſta, e però procedendo in tal guiſa, verrà coſtrutta la curva AQ. Ciò, che s'è detto della data equazione, ſi può applicare ad altra equazione contenente maggior numero di membretti.

Co-

COROLLARIO VI.

229. Data poi un'equazione, per ottenerne la quadratura, basta assegnare a ciascun membretto un'equazione a parte, e riflettere, se le figure indicate da tali particolari equazioni siano suscettibili di quadratura; che se si troveranno quadrabili, la loro somma, o la loro differenza darà l'area espressa dall'equazione proposta; ex. gr. l'equazione proposta sia $PQ = AP \pm \overline{AP}^2$; fatto $PN = AP$, $PM = \overline{AP}^2$, vedesi, che la prima equazione è al triangolo rettangolo equicrure, la seconda alla Parabola Apolloniana rivolta con la convessità all'asse; onde la quadratura da tal equazione indicata sarà $\frac{1}{2} AP \pm \frac{1}{3} \overline{AP}^3$ (85. 57.).

COROLLARIO VII.

230. L'equazione dunque alla data figura mostrerà tutte quell'aree rettilinee, e curvilinee, la somma o sottrazione delle quali viene impiegata in formare l'area totale, che vuol quadrarsi; e l'occhio stesso sarà giudice, senza venire a nuove attuali equazioni, di qual carattere sia l'area espressa da ciascun membretto considerato a parte.

Co-

Corollario VIII.

231. Detta dunque al folito PM l'applicata, AP l'afciffa, e fuppofto, che vi fia l'equazione generale $PM = a\overline{AP}^{m} \pm b\overline{AP}^{n} \pm c\overline{AP}^{r}$ &c., intendendo per a, b, c i coefficienti di ciafcun termine, e per m, n, r numeri interi, o rotti, pofitivi, o negativi quali fi vogliano, l'area curvilinea efpreffa da tal equazione continuata a piacere farà fempre coftruibile, e quadrabile; giacchè tutte l'aree rettilinee, e curvilinee particolari, che s'intereffano a formarne l'intero, fono riducibili a triangoli rettangoli ifofceli, o a Parabole quando gli efponenti fono pofitivi, e ad Iperboli tra gli afintoti quando fono negativi; quali figure, s'è veduto, effer tutte quadrabili, eccetto l'Iperbole comune tra gli afintoti (92. 109.).

Corollario IX.

232. Si può dunque trovare la formula generale per la quadratura delle curve incluse nell'antecedente equazione; imperciocchè ficcome l'equazione $PM = \overline{AP}^{n}$ comprende tutte le Parabole, e tutte le Iperboli tra gli afintoti, la quadratura delle quali è $\frac{\overline{AP}^{n+1}}{n+1}$ (85. 92. 57.), così l'area curvilinea efpreffa da qualunque membretto $\overline{AP}^{r}$ farà $\frac{\overline{AP}^{r+1}}{r+1}$; e fe

se un tal membretto fosse $\frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m-n}{n}}$, l'area, che rappresenta, sarà $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$; e se fosse $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$, l'area, che indica, sarà $\frac{n}{m+n}\overline{AP}^{\frac{m+n}{n}}$. Donde ricavasi la regola fondamentale delle quadrature; cioè *accrescasi d'una unità l'esponente della data variabile; indi questa medesima variabile così preparata dividasi per il medesimo esponente accresciuto d'una unità*; una tale operazione darà la misura dell'area, che si desidera.

COROLLARIO X.

233. Quando un membretto abbia la formula $(1+AP)^{\frac{m}{n}}$, in cui m sia positivo, o negativo, intero, o rotto, indicherà sempre un'area quadrabile, giacche tal area riducesi ad una Parabola troncata, ovvero ad un' Iperbole tra gli asintoti pur troncata. In fatti sia EM (*Fig.* 71. 72. 73.) una Parabola, o un' Iperbole tra gli asintoti VC, CD, il di cui asse CD, e la di cui equazione $\overline{CP}^{m} = \overline{PM}^{n}$; taglisi dalla CD una quantità costante CA, che per brevità sia 1. sarà $CP = 1+AP$, e si avrà l'equazione $PM = (1+AP)^{\frac{m}{n}}$; onde la sua quadratura per il corollario antecedente sarà $\frac{n}{m+n}(1+AP)^{\frac{m+n}{n}}$, e la quadratura dello spazio AEMP sarà $\frac{n}{m+n}(1+AP)^{\frac{m+n}{n}} - \frac{n \times 1^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$. Quando dunque il membret-

to

to $(1+AP)^{\frac{m}{n}}$ si dovesse sommare con un altro membretto della data equazione affetto della quantità AP, o desalcare dal medesimo, la quantità da sommarsi, o da desalcarsi sarebb el'area AEMP; ex. gr. se l'equazione fosse $PQ = \overline{AP}^{r} \pm (1+AP)^{\frac{m}{n}}$, la quadratura dell'infinite curve comprese vi sarebbe $\frac{\overline{AP}^{r+1}}{r+1} \pm \frac{n}{m+n}(AP+1)^{\frac{m+n}{n}} \mp \frac{n}{m+n} \times 1^{\frac{m+n}{n}}$; perche fatto r positivo a titolo d'esempio, il membretto $\overline{AP}^{r}$ denoterà una Parabola AN; ma debbono amendue l'aree da sommarsi, o da sottrarsi avere la medesima altezza AP; dunque tal somma, o tal sottrazione si dovrà fare tra lo spazio troncato Parabolico, o Iperbolico AEMP, e lo spazio Parabolico intero ANP, ovvero tra lo spazio AEBD, e lo spazio AFD. E perciò se la curva EB (*Fig.* 73.) sarà un'Iperbole Apolloniana tra gli asintoti, il suo spazio AEBD si esprimerà co'logaritmi iperbolici (68. 70.) riducibili anch'essi a logaritmi comuni.

COROLLARIO XI.

234. Quando poi un membretto avesse la formula $(1-AP)^{\frac{m}{n}}$, indicherà anch'esso una Parabola troncata, o un'Iperbole tra gli asintoti pur troncata (quando m non fosse eguale a n, mentre allora denoterebbe un triangolo iso-

ſoſcele), la di cui quadratura ſi troverà in una maniera ſimile a quella del Corollario precedente; imperciocchè ſia EM (*Fig.* 74. 75.) una Parabola, o un' Iperbole tra gli aſintoti, il di cui aſſe AP, e la di cui equazione $PM = \overline{PD}^{\frac{m}{n}}$, fatta la AD coſtante, e ſuppoſta l'origine dell'aſciſſa AP in A, ſarà $PD = 1 - AP$; ſicchè l'equazione diverrà $PM = (1-AP)^{\frac{m}{n}}$, la di cui quadratura ſarà $\frac{n}{m+n}(1-AP)^{\frac{m+n}{n}}$, e in conſeguenza lo ſpazio AEMP ſarà $\frac{n \times 1^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} - \frac{n}{m+n}(1-AP)^{\frac{m+n}{n}}$; volendoſi adunque ſommare, o ſottrarre il membretto $(1-AP)^{\frac{m}{n}}$ con un altro membretto, la ſomma, o la ſottrazione ſi eſeguirà riguardo al trapezoide AEMP con un'altr'area d'egual altezza AP, nel modo eſpoſto nel precedente Corollario, eſſendo la PM ſempre riferita alla AP. Ed intanto oſſervisi, che tanto in queſto, che nell'antecedente Corollario la quantità coſtante AD, ed i parametri delle curve EM ſuppongonſi tacitamente eguali; altrimenti converrebbe farne la diſtinzione.

COROLLARIO XII.

235. Se tra gli accennati membretti ve ne foſſe uno formato da una ſola quantità coſtante, è chiaro che rappreſenterà un rettangolo avente per altezza l'aſciſſa, e per ba-

ſe la detta quantità coſtante; il medeſimo intendaſi, ſe vi foſſero più membretti riſultanti di ſole quantità coſtanti di grandezza diverſa.

COROLLARIO. XIII.

236. Se uno di tali membretti conteneſſe oltre la AP una ſola variabile da eſſa AP diverſa, indicherà un triangolo rettangolo Scaleno della comune altezza AP; il medeſimo dicaſi di più membretti, ognuno de' quali contenga una ſola variabile diverſa da quella dell' altro; ex. gr. ſia l'equazione $PM = \overline{AP}^3 + nV + X - Z$, in cui le V, X, Z ſignifichino tante variabili fra loro diverſe; la quadratura di tal curva ſarà $\left(\frac{1}{2}\overline{AP}^3 + nV + X - Z\right) \times \frac{1}{2} AP$; e ſe foſſe l'equazione $PM = V + X - Z$, e che ſi ſapeſſe, che l'altezza comune foſſe indicata dalla V, la quadratura della figura rappreſentata da tal equazione ſarebbe $(V + X - Z) \times \frac{1}{2} V$.

COROLLARIO XIV.

237. Quando tra i membretti quadrabili ſe ne diano de' non quadrabili, l'equazione ſpeciale a ciaſcuno di eſſi additerà la natura delle curve, dalle quali la total quadratura della quantità data dipende.

Co-

COROLLARIO XV.

238. Se tra i membretti d'un'equazione ve ne fossero di quelli, che contenessero quantità complesse sotto un segno radicale, e che l'equazioni particolari a ciascuno di tali membretti si potessero costruire a foggia de' luoghi Geometrici, ogni area da tali particolari equazioni rappresentata sarà in tutto, o in parte quadrabile, quando appartenga a figure in tutto, o in parte quadrabili; onde potrà sommarsi con le quantità indicate dagli altri membretti, o da esse detrarsi; il che apre un vastissimo campo tanto per la quadratura, quanto per la costruzione delle curve, quando l'ostacolo provenga da segni radicali, contenenti varietà d'indeterminate.

SCOLIO II.

239. Io quì non intendo di parlare di que' luoghi Geometrici, che riguardano la combinazione di due curve per il ritrovamento delle radici, ma di quei luoghi, che riguardano una sola figura ad imitazione di quelli del secondo grado costruibili alle sezioni Coniche; dissi ad imitazione, perchè se ne possono con simil metodo costruire degli altri a curve di grado superiore al secondo. Volendo dunque servirsi del presente metodo relativamente a' menzionati luoghi Geometrici, basta immaginarsi, che all' altezza comune, a cui son riferiti i membretti della data equazione da costruirsi, o

da quadrarsi, siano convenientemente poste a perpendicolo quelle rette, che nel luogo Geometrico costrutto fanno figura d' applicate.

Così se in un luogo Geometrico costrutto le coordinate fossero LN, NQ (*Fig.* 76. 77. 78.), basta, che tutte le NQ, che fanno figura d' applicate, si suppongano poste ad angoli retti al medesimo livello dell' altezza comune; ex. gr. l' altezza comune, a cui riferisconsi i membretti della data equazione da costruirsi, o da quadrarsi, sia AP (*Fig.* 79.), intorno a cui per effettuare il primo membretto di detta data equazione, suppongasi già descritta la curva AM; presa LB (*Fig.* 76.), ovvero DN (*Fig.* 77.), ovvero LN (*Fig.* 78.) = AP, facciasi MR = NQ, e così sempre, l' area ASRP eguaglierà l' aree AMP, LNQ (*Fig.* 76.), ovvero l' area ATRP (*Fig.* 79. 77.) eguaglierà l' aree AMP, DGQN, ovvero (*Fig.* 79. 78.) l' aree AMP, LNQO, quali se saranno quadrabili, o geometricamente costruibili, sarà ancora quadrabile, o geometricamente costruibile la figura ASRP, ovvero ATRP indicata dalla data equazione. Vengasi ad un caso speciale, assumendo per maggior comodo i caratteri algebrici.

Se fosse proposta l' equazione principale $v = \sqrt{\left(\frac{azz}{b} - \frac{a^2 z^2}{4b^4} + a\right)} + \sqrt{(ay + bx - cc)} - \sqrt{\left(bs + ex - x^2\right)}$ &c. l' equazione particolare del primo membretto, in cui z faccia figura d' ap-

pli-

plicata farà $z = \sqrt{\left(\frac{axt}{b} - \frac{a^2t^2}{4b} + ct\right)}$, ovvero $zz - \frac{axt}{b} + \frac{a^2t^2}{4b^2} - ct = o$, la di cui coſtruzione è un luogo alla Parabola, come nella fig. 76., dove un triangolo LNB reſta aderente all' aſſe LB della Parabola Conica LQB; preſa dunque (*Fig.* 80. 76.) nell' aſſe nominato la LB per altezza comune, la NQ farà l' infima applicata, che eſſo primo membretto darà per coſtruire la prima figura dell' equazione principale ſuppoſta; onde fatto AP = LB, PM = NQ, e così ſempre, l' area AEMP eguaglierà l' area LNQ, che è quadrabile.

L' equazione particolare del ſecondo membretto, in cui la y denoti l' applicata, farà $y = \sqrt{(ay + bx - cc)}$, ovvero $y^2 - ay - bx + cc = o$, il luogo della qual' equazione appartiene nuovamente alla Parabola Conica DNQ (*Fig.* 77.); ſicche preſa DN = AP (*Fig.* 80. 77.), la NQ farà l' infima applicata da porſi a perpendicolo ſull' altezza comune; fatta dunque MR = NQ, AF = DG, e così da pertutto, l' area AEMRF eguaglierà l' area DGQN, di cui pure è reperibile la quadratura.

L' equazione poi del terzo membretto, in cui la s rappreſenti l' applicata, farà $s = \sqrt{(bs + cx - xx)}$, ovvero $s^2 + x^2 - bs - cx = o$, onde il luogo farà al cerchio; quindi preſo LN = AP (*Fig.* 78. 80.), e fatto RT = NQ, FS = LO, e così ſempre, l' area FRTS eguaglierà l' area LNQO, la di cui quadratura dipende da quella del cerchio.

In tal guiſa farà eſeguita la coſtruzione di tutta la figura PAST (*Fig.* 80.) indicata dalla data equazione principrinci-

cipale, la quadratura della qual figura dipende, come si è veduto, in parte dalla quadratura della Parabola Conica, o Apolloniana, e in parte da quella del cerchio. Vedasi il Wolfio ne' Luoghi geometrici (a), donde ho ricavato per altrui maggior facilità le predette formule. E tanto basti aver detto per mettere i luoghi geometrici Cartesiani a parte del calcolo riguardante le quadrature.

CA-

(a) *Elem. Math. Univ. T. I. P. I. [Sect. II. Cap. VII.*

CAPITOLO QUARTO.

Del Metodo diretto, ed inverso appartenente agl' INDIVISIBILI.

.*. .*. .*. .*.
.*. .*. .*.

DEFINIZIONE XI.

240. INDIVISIBILE, ELEMENTO o COMPONENTE d' un tutto, o d'un intero chiamo una delle innumerabili quantità fra loro equidistanti, o fra loro omogenee, nelle quali un tal tutto può esser risoluto.

DEFINIZIONE XII.

241. COMPOSTO, o SOMMA chiamo quel tutto, che possono formare i detti Indivisibili, o Componenti, messi insieme.

SCOLIO I.

242. Sia ex. gr. la figura piana BAD (*Fig.* 81.); suoi Indivisibili saranno gli archi innumerabili BAD, *bPd*, *bpd* fra loro equidistanti, che presi tutti insieme riempiono, e formano la detta figura, che è il loro composto, o la loro som-

somma. Similmente posta BD per sua base, suoi Indivisibili saranno le MPM, *mpm* &c. parallele ad essa base, e in conseguenza fra loro; ovvero suoi Indivisibili saranno i Settori ACE, ECF, FCM &c., che per esser figure triangolari possono chiamarsi per questo verso omogenee.

Che se la detta figura BAD rappresentasse un solido, i suoi Indivisibili sarebbero le sfoglie equidistanti rappresentate in profilo dagli archi suddetti *bPd*, *bpd*; ovvero tutti i piani paralleli con la base, e in conseguenza tra loro, che passano per le MPM, *mpm* &c., e che sono limitati dalla superficie del solido; ovvero tutte le Piramidi, o Coni inassegnabili ACE, ECF, FCM &c.

Più comodi poi, e più adattati all'uso, tanto nelle figure piane, che solide, sono gl'Indivisibili MPM, *mpm* &c. paralleli alla base, ed insieme perpendicolari all'asse AC.

Corollario I.

243. Gl'Indivisibili adunque di qualunque figura piana, o solida (eccettuando nelle prime ogni rettangolo, o romboide, nelle seconde ogni parallelepipedo) dovranno esser continuamente accresciuti, o diminuiti secondo il bisogno, acciò essa figura ne risulti, e perciò saranno quantità continuamente variabili. Così risguardo alle coordinate d'una figura potranno essere aumentate l'ascisse, mentre saranno aumentate l'applicate; e potranno essere aumentate l'ascisse, mentre l'applicate saranno diminuite, e viceversa.

Co-

COROLLARIO II.

244. Dunque l' indivisibile di tali quantità variabili sarà la loro minima differenza; cioè supposto, che le due applicate PM, *pm* siano poste l' una accanto all' altra, o siano infinitamente prossime, e parallele, e che da un punto estremo M sia tirata la M*o* parallela all' asse AP, la differenza *om* sarà l' indivisibile di tali applicate, perche messi insieme per diritto tali quantità omogenee formano un' intera applicata. Per tal ragione la piccolissima quantità P*p*, che è la differenza delle due porzioni AP, A*p* dell' ascissa corrispondenti alle dette applicate PM, *pm*, sarà l' indivisibile di detta ascissa; e l' archetto M*m* compreso tra l' intervallo delle menzionate due applicate PM, *pm* sarà l' indivisibile dell' arco intero AM. &c.

COROLLARIO III.

245. Se tra tutte le variabili di qualunque specie, che concorrono alla conformazione d' una figura, vi saranno mescolate delle quantità costanti; e se voglionsi ridurre a computo gl' indivisibili di ciascuno di tali ingredienti; è chiaro, che l' indivisibile delle quantità costanti sarà eguale a zero; perche essendo l' indivisibile d' una quantità l' istessa cosa che il datole incremento, o decremento, l' indivisibile d' una quantità non suscettibile di cangiamento deve esser nullo.

SCOLIO II.

246. Nel Cerchio, e nella Parabola per esempio, per quanto siano continuamente variabili l'ascissa, e l'ordinata, il Diametro nel primo, e il Parametro nella seconda si conservano sempre immutabili.

COROLLARIO IV.

247. Giacchè gl'indivisibili indicati da una retta variabile (come quelli d'una figura piana) debbono esser tutti della medesima latitudine, non essendovi ragione, per cui uno debba aver maggior latitudine dell'altro, gl'indivisibili dell'ascissa essendo formati dal segamento d'un'ordinata, dovranno esser tutti eguali; onde l'indivisibile di qualunque ascissa si potrà come costante porre $= 1$.

COROLLARIO V.

248. Non si potrà dir così degl'indivisibili dell'ordinate, i quali non nascendo in tal guisa, variano, com'è manifesto, continuamente al variare dell'ambito di quella figura, che riempiono.

Co-

COROLLARIO VI.

249. Se l'applicate saranno eguali all'ascisse, come nel triangolo rettangolo equicrure, gl'indivisibili tanto dell'ascissa, che dell'applicata saranno da per tutto l'istessa cosa; onde ognuno di loro nel detto triangolo può farsi $= 1$.

PROPOSIZIONE XIV.

250. *Dato il composto, o data la somma, trovarne il componente, o sia l'indivisibile.*

Suppongasi, che la data somma sia eguale ad un'applicata PM (*Fig.* 24. 29. 30. 31. 32. 33. 34.) d'una figura APM; divisa la detta applicata PM per la sottangente PT, il quoziente darà il valore, che si cerca.

Imperciocchè, supposta la costruzione come sopra (78.), PN è l'indivisibile della figura ADNP (240. 242.); ma la somma della PN, o sia l'aggregato di tutti gl'indivisibili componenti tal figura ADNP, vale a dire la figura istessa, è $PT \times PN = PM$ (76.); dunque PN, ch'è l'indivisibile della quantità $PT \times PN$, sarà ancora l'indivisibile della PM; ma $PN = \frac{PM}{PT}$; dunque data la somma PM, il suo indivisibile sarà $\frac{PM}{PT}$; il che &c.

Corollario I.

251. Dunque all'indivisibile *om* (*Fig.* 81.) di un' applicata PM si potrà ad un bisogno sostituire il quoziente nato dall'applicata divisa per la sottangente.

Corollario II.

252. Essendo $PT = \frac{PM}{PN}$, (*Figure suddette*), ne verrà, che la sottangente d'una figura sarà il quoziente nato dalla partizione dell'applicata per il suo indivisibile.

Esempio I.

253. Debbasi trovare l'indivisibile ad una quantità costante $= 1$; l'equazione sarà $PM = 1$, che è alla linea retta; ma questa non è suscettibile nè d'applicata, nè di sottangente; dunque una quantità costante non ammette indivisibile; che è quanto dire, l'indivisibile d'una quantità costante è eguale a zero, come sopra (245.)

Esempio II.

254. Sia richiesto l'indivisibile d'un'ascissa qualunque AP (*Fig.* 6.); tirata al solito all'applicata PM l'infinitamente prossima *pm*, indi condotte la M*o* parallela alla AP, e la MT tangente in M, si avrà l'analogia M*o* : *mo* : : PT : PM; onde

de $Mo = Pp = \frac{mo \times PT}{PM}$; ma $mo = \frac{PM}{PT}$; dunque $Pp = \frac{PT \times PM}{PT \times PM} = 1$.

Corollario.

255. Dunque l'indivisibile di qualunque ascissa è sempre la medesima quantità, come s' era quì sopra stabilito (247.); onde tant'è considerare l'applicata da per se sola, quanto moltiplicata nell'indivisibile dell'ascissa.

Scolio.

256. Dopo che si dimostrò, esser l'indivisibile dell' ascissa $= 1$. (247.), si poteva in primo luogo trovare addirittura l'indivisibile d'una data variabile, considerandola come applicata d'una figura; imperciocche all' applicata PM (*Fig. 6.*) della figura AMP tirata l'infinitamente prossima *pm*; indi dal punto M condotta la M*o* parallela alla AP, sarebbesi coll'analogia PT : PM :: 1 : *om* dimostrata la $om = \frac{PM}{PT}$, come sopra (250.); in secondo luogo si poteva dimostrare, esser l'indivisibile d'una quantità costante $= o$; poiche nel rettangolo ACB (*Fig. 82.*) considerata la AP come ascissa, e tirata all'applicata PM l'infinitamente prossima *pm*, nel volervi adattare l'antecedente analogia, si farebbe trovato, essere $mo = o$; ma siccome la detta dimostrazione, che l'indivisibile d'un'ascissa sia $= 1$, era più metafisica, che geometrica, così ho stimato necessario il tornar ciò a dimostrare con tutto il rigore geometrico.

E-

ESEMPIO III.

257. Sia proposto l'indivisibile della quantità $\sqrt{\left(1 \pm \overline{AP}^2\right)}$; fatta l'equazione $PM = \sqrt{\left(1 \pm \overline{AP}^2\right)}$, vedesi, che col segno negativo è al cerchio, e col positivo all'Iperbole equilatera, computate l'ascisse dal centro; ma in amendue queste curve la sottangente è terza proporzionale dopo l'ascissa, e l'applicata (27. N. 1.); dunque l'indivisibile richiesto sarà $\pm AP \times \frac{\sqrt{(1 \pm \overline{AP}^2)}}{1 \pm \overline{AP}^2} = \frac{\pm AP}{\sqrt{(1 \pm \overline{AP}^2)}}$.

ESEMPIO IV.

258. Se vogliasi l'indivisibile della quantità $\sqrt{\left(Q \times AP \pm Q \times \overline{AP}^2\right)}$, si avrà l'equazione $PM = \sqrt{\left(Q \times AP \pm Q \times \overline{AP}^2\right)}$, ovvero $\overline{PM}^2 = Q \times AP \pm Q \times \overline{AP}^2$, che col segno negativo è all'Ellisse, col positivo all'Iperbole, nelle quali il maggior asse $= 1$, e il parametro $= Q$; ma in amendue tali curve la sottangente è $\frac{2AP \pm 2\overline{AP}^2}{1 \pm 2AP}$; dunque l'indivisibile cercato sarà $\frac{(1 \pm 2AP) \times \sqrt{Q}}{2\sqrt{(AP \pm \overline{AP}^2)}}$.

Co-

COROLLARIO.

259. Quindi ſe gli aſſi ſono eguali, cioè ſe anche $Q = 1$ (nel qual caſo l'equazione ſi converte col ſegno negativo al cerchio, e coll'affermativo all'Iperbole equilatera, computate l'aſciſſe dal vertice), l'indiviſibile della quantità $\sqrt{(AP \pm \overline{AP}^2)}$ ſarà $\frac{1 \pm 2AP}{2\sqrt{(AP \pm \overline{AP}^2)}}$.

ESEMPIO V.

260. Se ſi brami l'indiviſibile della quantità $\frac{\sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)}}{AP}$, fatto $PM = \frac{\sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)}}{AP}$, vedeſi, che l'equazione è alla Verſiera Grandiana (29.). Sia queſta pertanto BM (*Fig.* 8.), il di cui cerchio genitore ANB, che ha per raggio $AC = 1$; giacchè la di lei ſottangente $PT = \frac{-(2AC \times AP - \overline{AP}^2)}{AC}$ (*l. cit.*), l'indiviſibile della propoſta quantità ſarà $\frac{-PM \times AC}{2AC \times AP - \overline{AP}^2}$; ma $PM = \frac{PN \times AB}{AP} = AB \times \frac{\sqrt{(2AC \times AP - \overline{AP}^2)}}{AP}$; dunque il deſiderato indiviſibile ſarà $\frac{-AB \times AC}{AP \times \sqrt{(2AC \times AP - \overline{AP}^2)}}$; cioè per eſſere $AC = 1$; ſarà $\frac{-2}{AP \times \sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)}}$.

Co-

COROLLARIO.

261. Se la data quantità, di cui voleasi l'indivisibile; fosse stata $\frac{\sqrt{(AP - \overline{AP}^2)}}{AP}$, allora essendo $AB = 1$, $AC = \frac{1}{2}$, il suo indivisibile sarebbe stato $\frac{-1}{2AP \times \sqrt{(AP - \overline{AP}^2)}}$.

ESEMPIO VI.

262. Convenga trovare l' indivisibile alla somma $\overline{AP}^n$, e sia n un numero qualunque intero, o rotto positivo, o negativo; l' equazione $PM = \overline{AP}^n$, ovvero $\overline{PM}^{\frac{1}{n}} = AP$ sarà all' infinite Parabole, o all' infinite Iperboli tra gli asintoti, la sottangente delle quali è $\frac{1}{n} AP$; onde avrassi $\frac{PM}{PT} = n \overline{AP}^{n-1}$; che sarà l' indivisibile richiesto.

COROLLARIO I.

263. Se alla quantità $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$ si dovesse trovare l' indivisibile, questo sarebbe $\frac{m}{n} \overline{AP}^{\frac{m}{n} - 1} = \frac{m}{n} \sqrt[n]{\overline{AP}^{m-n}}$; se la data quantità fosse $\overline{AP}^{m+1}$, il suo indivisibile sarebbe $(m+1) \overline{AP}^m$.

Co-

COROLLARIO II.

264. L'indivisibile dell'ascissa AP è 1 (247. 254.); l'indivisibile di $\overline{AP}^2$ è $2AP \times 1$; l'indivisibile di $\overline{AP}^3$ è $3\overline{AP}^2 \times 1$; e in generale l'indivisibile di $\overline{AP}^n$ è $n\overline{AP}^{n-1} \times 1$; dal che ricavasi la Regola I. fondamentale per il calcolo degl' indivisibili, vale a dire 1.) *si moltiplichi la data variabile nel suo esponente;* 2.) *se le lasci il detto esponente diminuito d'una unità;* 3.) *si moltiplichi nuovamente tal quantità così preparata nell' indivisibile di detta variabile, considerandola come se avesse l' unità per esponente; tale operazione darà il richiesto indivisibile*. Così l'indivisibile della quantità $\overline{AP}^m \pm \left(AP \pm \overline{AP}^r\right)^{\frac{1}{n}}$ sarà $m\,\overline{AP}^{m-1} \pm \frac{1}{n}\left(AP \pm \overline{AP}^r\right)^{\frac{1}{n}-1} \times \left(1 \pm r\overline{AP}^{r-1}\right)$.

SCOLIO.

265. Se si considera l'istessa Parabola ora rivolgente la convessità, ora la concavità all'asse, si vedrà, che quella, che nel primo caso fa figura d' ascissa, nel secondo si converte in applicata; ma in amendue i casi i loro indivisibili si trovano con l'istessa menzionata regola fondamentale; dunque a tal legge è sottoposta tanto l' una, quanto l'altra delle coordinate d' una figura; il che può ancora dimostrarsi nella seguente maniera, che somministra un altro metodo per

 fon-

fondare l'antecedente regola. L'indivisibile dell'ascissa AP è $AP+Pp-AP$ (*Fig. 6.*); onde l'indivisibile $\overline{Pp}^2$ sarà $(AP+Pp)^2 - \overline{AP}^2 = \overline{AP}^2 + 2AP \times Pp - \overline{AP}^2$ (11.) $= 2AP \times Pp$; e proseguendo con tal ordine si troverà dopo alquante operazioni, che l'indivisibile d'una variabile $\overline{AP}^n$ è $n\overline{AP}^{n-1} \times Pp = n\overline{AP}^{n-1}$ (254.); nell'istessa guisa si troverà, che l'indivisibile della $\overline{PM}^n$ è $n\overline{PM}^{n-1} \times om = n\overline{PM}^{n-1} \times \frac{PM}{PT}$ (250.) $= \frac{n\overline{PM}^n}{PT}$.

PROPOSIZIONE XV.

266. *Trovar l'indivisibile, o elemento di qualunque prodotto formato da una variabile, ed una costante, o da due variabili vicendevolmente moltiplicantisi.*

Supposta intorno l'asse AP (*Fig.* 83.) una figura qualunque ABC, e presa nel detto suo asse una quantità costante $AC = 1$, facciasi $\overline{AC}^n : \overline{AP}^n :: PN : PM$, e così sempre, ne nascerà la figura AMDC, la di cui equazione sarà $PM = PN \times \overline{AP}^n$; onde sostituiti a PN gli equivalenti in termini di AP, o viceversa, si troverà l'indivisibile della quantità $PN \times \overline{AP}^n$, dividendo la PM per la sottangente PT (250.); il che &c.

Co-

COROLLARIO I.

267. E' manifesto, che la detta analogia si può variare a piacere per la formazione della figura AMDC.

COROLLARIO II.

268. Se la figura ACB sia un quadrato, la figura AMD sarà una Parabola rivolgente la convessità all' asse quando n sia un numero positivo intero, e la concavità quando un tal numero sia rotto; e sarà un' Iperbole tra gli asintoti quando n sia un numero qualunque negativo; onde l' indivisibile del prodotto $PN \times \overline{AP}^{n}$, cioè del prodotto $\overline{AP}^{n}$, sarà $\frac{n\overline{AP}^{n}}{AP} = n\overline{AP}^{n-1}$, come sopra (262.).

COROLLARIO III.

269. Se si fosse fatto $\overline{AC}^{m} : \overline{AP}^{m} :: \overline{PN}^{n} : \overline{PM}^{n}$, l' equazione alla figura ADC sarebbe stata $PM = \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$, sicche l' indivisibile della variabile $\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$ sarebbe $\frac{m}{n}\overline{AP}^{\frac{m}{n}-1}$, come sopra (263.).

COROLLARIO IV.

270. Se la figura ACB suppongasi essere un rettangolo, e facciasi $\overline{AC}^{m} : \overline{AP}^{m} :: \overline{PN}^{n} : \overline{PM}^{n}$, l' equazione all' insortane fi-

gura ADC farà $PM = PN \times \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$; onde l'indivifibile del prodotto $PN \times \overline{AP}^{\frac{m}{n}}$, fi troverà effere $\frac{m}{n} PN \times \overline{AP}^{\frac{m-n}{n}}$; il che dimoftra, che *le quantità coftanti mefcolate con le variabili di qualunque grado non alterano l'enunciata regola fondamentale* (264.), *ed effe quantità coftanti reftano fempre inalterabili, non foffrendo altri cangiamenti, eccetto quelli, che dipendono dalle leggi ordinarie del calcolo.*

COROLLARIO V.

271. Se la figura ACB (*Fig.* 83.) fia un triangolo rettangolo ifofcele ne'lati AC, CB, e facciafi $\overline{AC}^{m} : \overline{AP}^{m} :: \overline{PN}^{n} : \overline{PM}^{n}$, l'equazione alla figura ADC farà $PM = \overline{AP}^{\frac{m+n}{n}}$ nuovamente all'infinite Parabole, o Iperboli tra gli afintoti, onde l'indivifibile di $\overline{AP}^{\frac{m+n}{n}}$ farà $\frac{m+n}{n}\overline{AP}^{\frac{m}{n}}$.

COROLLARIO VI.

272. Se il detto triangolo rettangolo ACB non foffe ifofcele, ma fcaleno, e foffe fatta l'analogia $\overline{AC}^{m} : \overline{PN}^{m} :: AP : PM$, l'equazione alla natane figura ADC farebbe $PM = \overline{PN}^{m} \times AP$;

$\times$AP; onde giacche AP$\times\overline{PN}^{m}$ ſta come $\overline{AP}^{m+1}$, la figura ADC ſarà di nuovo una dell'infinite Parabole, o dell'infinite Iperboli tra gli aſintoti, e però l'indiviſibile di $\overline{PN}^{m}\times$ AP ſarebbe $(m+1)\frac{PM}{AP} = (m+1)\frac{\overline{PN}^{m}\times AP}{AP} = (m+1)\ \overline{PN}^{m}$.

S C O L I O.

273. Fatto $m = 1$, l'indiviſibile di AP$\times$PN ſarà 2PN, e l'indiviſibile di $\frac{1}{2}$ AP$\times$PN ſarà PN; ſicche viceverſa la ſomma di 2PN ſarà AP$\times$PN, e la ſomma di PN ſarà $\frac{1}{2}$ AP$\times$PN, quando la PN riferiſcaſi come applicata alla nota aſciſſa AP; il che ſerve di conferma a ciò, che con altro metodo ſi era poch'anzi determinato (236.). Con tal condizione la ſomma dell'indiviſibile $(m+1)\ \overline{PN}^{m}$ ſarà $\overline{PN}^{m}\times$AP, il che è più manifeſto nella caratteriſtica del calcolo infiniteſimale, in cui ſecondo queſti principj la ſomma della formula $(m+1)\ t^{m}dx \pm v^{n}dx \pm z^{r+1}dx$ &c. ſarebbe $xt^{m} \pm \frac{xv^{n}}{n+1} \pm \frac{xz^{r+1}}{r+2}$ &c. vale a dire, ſi farà la ſomma ſecondo la legge fondamentale ſuperiormente ſtabilita (232.), dividendo ogni

ogni membretto di detta formula per l' esponente accresciuto dell'unità, ma si lascerà alla variabile, che accompagna la dx, il solito suo esponente, ed in vece d'accrescerlo dell' unità, si moltiplicherà la detta variabile così preparata in n somma di dx, qual dx deve in conseguenza cancellarsi.

PROPOSIZIONE XVI.

274. *Trovar nuovamente l' indivisibile di due variabili scambievolmente moltiplicantisi.*

Tali variabili siano le due coordinate AP, PM d' una figura qualunque AM (*Fig.* 84.); tirata la pm infinitamente prossima all' applicata PM, facciasi per il punto M passare la oMB parallela all' ascissa AP, e dal punto m conducasi la mb parallela alla oB, che le sarà ancora infinitamente prossima; è chiaro, che la somma de' due infinitesimi rettangoli Bom, PMo formerà l' indivisibile di ciò, che nasce dal moltiplicare insieme le due variabili AP, MP, e ciò in qualunque luogo dell' area curvilinea APM; onde insistendo sul metodo già accennato (265.), l' indivisibile del prodotto $AP \times PM$ sarà $(AP+Pp)\times(PM+mo)-AP\times PM=AP\times PM+AP\times om+PM\times Pp+om\times Pp-AP\times PM=AP\times om+PM\times Pp$ (11.); il che &c.

COROLLARIO I.

275. Se le applicate scemassero al crescer dell' ascisse, allora la somma si converte in sottrazione; imperciocchè siccome l' indivisibile mo (*Fig.* 85.) dell' applicata PM và crescendo

do contrariamente a quello dell' ascissa AP, è manifesto, che dev' esser congiunto col segno negativo, e però in tal caso l' indivisibile del prodotto $PM \times AP$ sarà $PM \times Pp + AP \times -mo$, cioè $PM \times Pp - AP \times mo$.

Corollario II.

276. Quindi la Regola II. *Si moltiplichi a vicenda una variabile nell' indivisibile dell' altra, e d' amendue tali prodotti facciasi la somma quando tanto l' una, che l' altra di tali variabili vadano sempre crescendo; ma facciasi la differenza quando al crescer dell' una l' altra diminuisca; avvertendo, che il defalco cada dalla parte di quella, che va scemando; tale operazione darà l' indivisibile di due variabili scambievolmente moltiplicantisi.*

Corollario III.

277. Condotta dunque dal punto M (*Fig.* 84. 85.) la tangente MT, l' indivisibile del prodotto di due variabili sarà generalmente secondo i posti principj (250. 254.) $PM \pm \frac{AP \times PM}{PT}$.

Corollario IV.

278. Se si volesse l' indivisibile del prodotto d' una costante in una variabile, cioè se nel rettangolo AB (*Fig.* 82.)

fat-

fatta variabile la porzione AP del lato AC, e costante il lato BC, si cercasse l'indivisibile del prodotto $AP \times BC$, ovvero $AP \times PM$, si troverà esser tale indivisibile $= PM \times Pp = PM$ (255.).

COROLLARIO. V.

279. Se la data figura fosse un triangolo rettangolo equicrure ABC (*Fig.* 86.), l'indivisibile del prodotto $AP \times PM = \overline{AP}^2$ (replicando l'operazione fatta nella dimostrazione della presente Proposizione) sarà $\overline{AP}^2 + 2AP \times Pp + \overline{Pp}^2 - \overline{AP}^2 = 2AP \times Pp + \overline{Pp}^2$; ma è certissimo per le dimostrazioni replicatamente fatte (261. 268.), che l'indivisibile di $\overline{AP}^2$ è $2AP \times Pp$; dunque sarà $2AP \times Pp + \overline{Pp}^2 = 2AP \times Pp$; il che dimostra, che *il quadrato d' un' indivisibile, o sia d' una quantità inassegnabile deve esser nullo relativamente ad un prodotto d' una quantità assegnabile in una inassegnabile*.

COROLLARIO VI.

280. Se la data figura fosse un triangolo rettangolo scaleno ABC (*Fig.* 86.), l'indivisibile del prodotto $AP \times PM$ sarebbe $AP \times om + PM \times Pp + om \times Pp$; ma $om = \frac{PM \times Pp}{PA}$; dunque $AP \times om = PM \times Pp$; e però il detto indivisibile sarà

rà $2PM \times Pp + om \times Pp$; ma l'indivisibile di $AP \times PM$, s'è dimostrato, essere $2PM \times Pp$ (272. 273. 255.); dunque *il rettangolo* $om \times Pp$ *delle due inassegnabili in confronto del prodotto d'una quantità assegnabile in una inassegnabile deve considerarsi come zero.*

COROLLARIO VII.

281. Se dunque prima d'ora era stato più metafisicamente, che geometricamente dimostrato, che il prodotto d'un'inassegnabile in se stesso, o di due inassegnabili poteva in faccia al prodotto d'un'assegnabile in un'inassegnabile considerarsi come nullo, resta ora contra i vani timori d'alcuni scrupolosi dimostrato per vie tutt'affatto geometriche.

PROPOSIZIONE XVII.

282. *Trovar l'indivisibile o elemento di due variabili vicendevolmente dividentisi.*

Intorno all'asse AP (*Fig.* 83.) suppongasi costrutta una figura qualunque ABC, e presa nel suo asse una quantità costante AC, che sia 1, facciasi $\overset{m}{\overline{PN}} : \overset{m}{\overline{AC}} :: AP : PM$, e così continuamente; ne risulterà la figura ADC, la di cui equazione sarà $PM = \frac{AP}{\overset{m}{\overline{PN}}}$; onde sostituiti a PN i valori in termini di AP, si troverà l'indivisibile del quoziente $\frac{AP}{\overset{m}{\overline{PN}}}$,

 di-

dividendo la PM per la sottangente PT (250.); il che &c.

Corollario I.

283. E' chiaro, che la detta analogia può farsi anche in altre maniere ex. gr. $\overline{AP}^m : \overline{AC}^m :: PN : PM$; $\overline{PN}^m : \overline{AP}^m :: AC - AP : PM$ &c.

Corollario II.

284. Se ACB sia un quadrato, e l'analogia facciasi $\overline{PN}^m : \overline{AP}^m :: AC : PM$; l'equazione alla figura ADC sarà $PM = \overline{AP}^m$; onde questa figura sarà al solito una delle infinite Parabole o dell'infinite Iperboli tra gli asintoti; sicchè l'indivisibile della variabile $\overline{AP}^m$ sarà nuovamente $m\overline{AP}^{m-1}$.

Corollario III.

285. Quando la figura ACB sia un triangolo rettangolo equicrure, e l'analogia sia $\overline{PN}^n : \overline{AC}^n :: \overline{AP}^m : \overline{PM}^m$, l'equazione alla figura ADC sarà $PM = \overline{AP}^{m-n}$, cioè ad infinite Parabole quando $m-n$ fosse positivo (eccetto $m-n=1$, ovvero $=0$), e ad infinite Iperboli tra gli asintoti quando fosse negativo. Se ad infinite Parabole, l'indivisibile della

quan-

quantità variabile $\frac{\overline{AP}^{m}}{\overline{AP}^{n}}$, ovvero $\overline{AP}^{m-n}$ si troverà, essere $(m-n)\overline{AP}^{m-n-1}$; Se ad infinite Iperboli tra gli asintoti, l'indivisibile di detta quantità variabile si troverà, facendo $m-n=r$; ed allora l'equazione dirà $PM=\overline{AP}^{-r}$; onde il suo indivisibile sarà $\frac{-rPM}{AP}=-r\overline{AP}^{-r-1}$; il tutto come sopra ne' luoghi più volte citati.

PROPOSIZIONE XVIII.

286. *Trovar nuovamente l'indivisibile di due variabili scambievolmente dividentisi.*

Tali variabili siano le due coordinate AP, PM d'una figura qualunque AMP (*Fig.* 84.); tirate la pm infinitamente prossima alla PM, e la Mo parallela alla AP, è chiaro, che l'indivisibile del quoziente $\frac{AP}{PM}$ è $\frac{AP+Pp}{PM+om}-\frac{AP}{PM}$; onde riducendo tal quantità al medesimo denominatore, si avrà $\frac{AP \times PM + PM \times Pp - PM \times AP - om \times AP}{(PM+om) \times PM}=\frac{PM \times Pp - AP \times om}{(PM+om) \times PM}$; ma $PM+om=PM$ (7.); dunque l'indivisibile richiesto del quoziente $\frac{AP}{PM}$ sara $\frac{PM \times Pp - AP \times om}{\overline{PM}^{2}}$; il che &c.

Corollario I.

287. Se mentre crefcono le afciffe AP (*Fig.* 85.), fcemaffero le applicate PM, o viceverfa, allora crefcerebbe l'indivifibile Pp dell'afciffa AP, e fcemerebbe l'indivifibile om dell'applicata PM, o viceverfa; e perciò l'indivifibile d'una coordinata deve in tal cafo effer fempre accompagnato con fegno contrario a quello prefiffo all'indivifibile dell'altra. Pofto ciò, l'indivifibile del quoziente $\frac{AP}{MP}$ farà $\frac{AP}{PM} - \frac{AP+Pp}{PM-mo} =$

$$\frac{AP \times PM - AP \times mo - AP \times PM + PM \times Pp}{\overline{PM}^2} = \frac{PM \times Pp - AP \times om}{\overline{PM}^2};$$

come fopra.

Corollario. II.

288. Quindi la Regola III. 1.) *Si moltiplichi il denominatore dell' indivifibile del numeratore; 2.) dal prodotto detraggafi il prodotto del numeratore nell' indivifibile del denominatore; 3.) tal differenza dividafi per il quadrato del denominatore; queft' operazione darà l' indivifibile di due quantità variabili fcambievolmente dividentifi.*

Corollario III.

289. Dunque tirata dal punto M la tangente MT (*Fig.* 84. 85.), l'indivifibile del quoziente dell' afciffa divifa per l' applicata farà fecondo i pofti principj (250. 254.)

$$\frac{PM \times PT - AP \times PM}{PT \times \overline{PM}^2} = \frac{PT - AP}{PT \times PM}.$$

Co-

COROLLARIO IV.

290. Ma ſe il quoziente delle variabili dividentiſi foſſe $\frac{PM}{AP}$, cioè l' applicata diviſa per l' aſciſſa, il ſuo indiviſibile ſarebbe $\frac{AP \times om - PM \times Pp}{\overline{AP}^2} = \frac{AP \times PM - PM \times PT}{PT \times \overline{AP}^2}$.

COROLLARIO V.

291. Se la data figura foſſe un rettangolo ACB (*Fig.* 82.), e ſi cercaſſe l' indiviſibile del quoziente $\frac{PM}{AP} = \frac{1}{AP}$, tal diviſibile (rinnuovando il calcolo fatto nella dimoſtrazione della preſente Propoſizione) ſarebbe $\frac{1}{AP+Pp} - \frac{1}{AP} = \frac{AP - AP - Pp}{(AP+Pp) \times AP}$ $= \frac{-Pp}{(AP+Pp) \times AP}$; ma è coſa certa per le fatte dimoſtrazioni, (262. 283. 284.), che l' indiviſibile della quantità $\frac{1}{AP}$ è $\frac{-Pp}{\overline{AP}^2}$; dunque $(AP+Pp) \times AP = \overline{AP}^2$, e in conſeguenza $AP+Pp = AP$; il che dimoſtra, che *aggiungendo ad una inaſſegnabile, o togliendo da eſſa una quantità inaſſegnabile, tal giunta, o tal defalco non altera geometricamente tal aſſegnabile;* dico geometricamente, perchè un tal eccesso, o un tal difetto è incapace totalmente di miſura percettibile.

Sco-

SCOLIO.

292. Quando le potenze d' una coordinata sono proporzionali a quelle dell' altra, si conoscerà, col far rifleſſione a ciò, che s' è poch' anzi dimostrato (268, 283.), ovvero col farne la prova, che l' ultime due regole enunciate di moltiplicazione, e divisione (276. 287.) per trovare l' indivisibile del prodotto, o del quoziente di due variabili sono promiscue, cioè conducono egualmente l' una, che l' altra a sciorre il Problema; ma quando manca una tal proporzionalità nelle dette coordinate, allora l' affare non và così, essendo affatto diverse le regole per giungere a tal soluzione.

PROPOSIZIONE XIX.

293. *Dato il componente, o sia l' indivisibile, trovare il composto, o sia la somma.*

Il dato indivisibile si consideri com' eguale all' applicata PN (*Fig*: 24. 29. 30. 31. 32. 33. 34.) d' una figura ADNP; conosciuta da tal equazione la natura di detta figura, si trovi cogli esposti metodi (58. e seg.), o con altri, un altra figura APM, le di cui applicate PM siano proporzionali all' aree ADNP, indi moltiplicando la sottangente PT della seconda figura APM nell' applicata PN della prima figura, il prodotto darà la somma richiesta.

Imperciocche essendo PN eguale al dato indivisibile, l' intera figura ADNP eguaglierà la sua somma; ma questa figura eguaglia il prodotto della PT nella PN (78.); dunque tal

tal prodotto eguaglierà la somma richiesta del dato indivisibile; il che &c.

ESEMPIO I.

294. Il dato indivisibile sia una quantità costante, cioè 1, di cui richiedasi la somma; l' equazione $PN=1$ indicherà un rettangolo AD (*Fig.* 86.); ma in questo l' aree AN stanno come l'applicate PM del triangolo ABC, la di cui sottangente è AP; dunque la somma richiesta sarà $AP \times PN$ riguardo al rettangolo AN, ovvero $AC \times CD$ riguardo a tutto il rettangolo AD, com' appunto insegnano gli Elementi.

ESEMPIO II.

295. Sia AP il dato indivisibile, di cui richiedasi la somma. Piglisi PN per l'applicata d'una figura, e s'avrà $PN=AP$, equazione ad un triangolo equilatero AID (*Fig.* 99), le di cui aree APN stando come il quadrato di AP, saranno proporzionali all' applicate PM della Parabola Apolloniana AM rivolgente la convessità all'asse AP, e che ha la sottangente $PT=\frac{1}{2}AP$ (22.); onde la somma ricercata sarà $\frac{1}{2}AP \times PN=\frac{1}{2}\overline{AP}^2$; il che pure concorda cogli Elementi.

E-

ESEMPIO III.

296. Sia il dato indivisibile $\frac{1}{\sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)}}$, cioè reciproco all'applicata PM (*Fig.* 21.) del cerchio ADB, il di cui centro C, e il di cui raggio $AC = 1$; avremo per equazione $PS = \frac{1}{PM}$, qual equazione è alla curva SE, le di cui aree AVSP stanno come gliarchi circolari AM (62.), cioè come l'applicate d'un'uugula cilindrica appianata, di cui già si fece menzione (38.), la di cui sottangente è $PM \times arc{:}AM$ (38.); onde la somma del proposto indivisibile $\frac{1}{\sqrt{(2AP - \overline{PA}^2)}}$ sarà $PM \times arc{:}AM \times PS = arc{:}AM = arc{:}AM \times AC$; cioè l'area AVSP eguaglia il doppio del settore AMC, e l'area AVEC il doppio del quadrante ADC appunto come si è altrove determinato (94.).

COROLLARIO.

297. Quindi raccogliesi, essere la semicicloide AMB (*Fig.* 45.) tripla del semicerchio genitore AND, perchè ogni NM come eguale al corrispondente arco AN, eguaglierà ogni applicata della suddetta ungula cilindrica appianata, onde tutto il trapezio semicicloidale ANDBMA sarà doppio del semicerchio AND, e in conseguenza la semicicloide AMBD sarà tripla del semicerchio genitore AND, ovvero tutta la cicloide tripla del cerchio genitore.

E-

ESEMPIO IV.

298. L' indivifibile da fommarfi fia il feno retto divifo per il feno verfo, cioè $\frac{PG}{AP}$ (*Fig. 69.*); l' equazione farà $PQ=\frac{PG}{AP}$, che è alla Verfiera Grandiana QS più volte nominata, l' aree AVQP della quale ftanno come l' applicate PM della Cicloide AM (64.), che ha la fottangente $PT=\frac{AP\times PM}{PG}$; onde la fomma del dato indivifibile farà $PM\times 1$, cioè il prodotto di PG+*arc*:AG in una quantità coftante, dalla minore, o maggior grandezza della quale dipende la minore, o maggior grandezza della PQ, e in confeguenza la minore, o maggiore ampiezza dell' area AVQP; onde fe nella genefi dell' area AVQP farà prefo il raggio AC=1, la fomma dell' affegnato indivifibile $\frac{PG}{AP}$ farà il doppio del fettore circolare AIG, il che concorda, come deve, con la già data mifura (96.); ficche fatto il raggio AC=1, il propofto indivifibile in termini di AP farà $\frac{\sqrt{(2AP-\overline{AP}^2)}}{AP}$, e la fua fomma farà $\sqrt{(2AP-\overline{AP}^2)}$ + *arc*: AG.

COROLLARIO

299. Si è veduto nell' Efempio antecedente (295.), che l' arco AG è la fomma dell' indivifibile $\frac{1}{\sqrt{(2AP-\overline{AP}^2)}}$; dunque

que facendo, che il fegno $\int$ indichi fomma, la fomma dell' indivifibile $\frac{\sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)}}{AP}$ farà $\sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)} \int \frac{1}{\sqrt{(2AP - \overline{AP}^2)}}$.

ESEMPIO V.

300. Sia il dato indivifibile $\overline{AP}^n$, pigliando n per qualunque numero pofitivo intero, o rotto; facciafi l'equazione $PN = \overline{AP}^n$, ch'è all' infinite Parabole DN (*Fig.* 29. 30.), l'aree ANP delle quali ftanno come l'applicate d'un'altra Parabola AM, la di cui equazione è $AQ = \overline{QM}^{n+1}$ (87.); onde fi troverà effere la fottangente $PT = \frac{1}{n+1} AP$ (80.), e in confeguenza la fomma del dato indivifibile $\overline{AP}^n$ farà $\frac{1}{n+1} AP \times PN = \frac{\overline{AP}^{n+1}}{n+1}$ (57.).

COROLLARIO I.

301. Se il dato indivifibile foffe $\overline{AP}^{-n}$, dove per n s'intende qualfivoglia numero intero, o rotto, l'equazione farebbe $PN = \overline{AP}^{-n}$, cioè all'infinite Iperboli DN tra gli afintoti (*Fig.* 33. 34.), ficchè la fua fomma fi troverebbe effere per le cofe dette (92.) $\frac{1}{1-n} PT \times PN = \frac{\overline{AP}^{1-n}}{1-n} = \frac{\overline{AP}^{-n+1}}{n+1}$;

on-

onde pigliando generalmente nell' indivisibile $\overline{AP}^{n}$ la quantità n per un numero rotto, o intero, positivo, o negativo la formula $\frac{\overline{AP}^{n+1}}{n+1}$ indicherà sempre la di lui somma.

COROLLARIO II.

302. Quindi riguardo alle quadrature verrebbesi a replicare l'istessa Regola fondamentale superiormente enunciata (232.), dimodochè se vi fosse l'equazione $\overline{PM}^{m} = AP \pm \overline{AP}^{2}$, che col segno negativo è ad infiniti cerchj, e coll'affermativo ad infinite Iperboli riferite all'asse, si otterrà sempre la quadratura di tali curve ogni volta che n riducasi ad un numero rotto, il di cui numeratore sia l'unità; perchè fatto in tal caso $n = \frac{1}{m}$, l'equazione sarà $PM = (AP \pm \overline{AP}^{2})^{m}$; sicchè posto per esempio $m = 2$, l'equazione dirà $PM = \overline{AP}^{2} \pm 2\overline{AP}^{3} + \overline{AP}^{4}$, la quadratura della qual curva è $\frac{1}{3}\overline{AP}^{3} \pm \frac{1}{2}\overline{AP}^{4} + \frac{1}{5}\overline{AP}^{5}$, il che dà il contegno per altri casi consimili.

PROPOSIZIONE XX.

303. *Dato il logaritmo d'una variabile, trovarne l'indivisibile, o sia l'elemento.*

Il numero espresso dalla variabile CQ (*Fig.* 109.) applicata alla logistica ordinaria QMB, il di cui asintoto CE,

e la di cui ſottangente PT, abbia per logaritmo l'aſciſſa PC. Prolungata queſta indefinitamente in V, tra gli aſintoti QC, CV deſcrivaſi l'Iperbole equilatera NDV, il lato della di cui potenza eguagli la ſottangente PT; indi da i punti M, Q conducanſi alla detta curva iperbolica le rette MAD, QN parallele alla PC.

Lo ſpazio iperbolico QNDA proporzionale alla corriſpondente AM (67. 71.) $=$ PC, eſprimerà il logaritmo della CQ (68. 70.); ma l'indiviſibile, o elemento di tale ſpazio è la QN (240.) $=\frac{1}{CQ}$; dunque l'indiviſibile, o elemento del logaritmo della variabile CQ è $\frac{1}{CQ}$; il che &c.

Corollario I.

304. Siccome la progreſſione geometrica creſcente comincia ordinariamente per maggior comodo dall'unità, e la progreſſione aritmetica dal zero, fatta l'applicata PM eguale alla ſottangente $PT = 1 = CA$, ſi ſupponga, che l'origine della variabile AQ ſia in A; ſi dimoſtrerà coll'iſteſſo metodo, che eſſendo QN l'elemento dello ſpazio iperbolico QNAD eſprimente il logaritmo della $CQ = 1 + AQ$, l'elemento, o indiviſibile di tal logaritmo dovrà eſſere $\frac{1}{1+AQ}$.

Corollario II.

305. Parimente ſe ritenuta la AC per coſtante, la variabile AH, che ha l'iſteſſa origine in A, vada creſcendo al con-

contrario della AQ, il logaritmo della HC = 1 — AH espresso dall'area iperbolica ADGH, dovrà avere il segno negativo, essendo logaritmo di numero minore dell'unità, e però negativo a differenza del logaritmo della CQ, che essendo maggiore dell'unità, è positivo; ma l'indivisibile, o elemento di tal area ADGH è la $HG = \frac{1}{CH} = \frac{1}{1 - AH}$; dunque prefisso a tal formula il segno negativo, l'elemento, o indivisibile della quantità 1 — AH, cioè della differenza d'una variabile da una costante, sarà $\frac{-1}{1 - AH}$.

S c o l i o I.

306. Che l'area iperbolica ADGH esprima il logaritmo negativo della CH, così dimostrasi. Ritenuta al solito la prima applicata PM = CA = PT, e fatta PO = PC, dal punto O si ordini alla logistica la O*b*, che dalla DM sia segata in *a*; poscia intorno all'angolo retto O col lato della potenza = O*a* = PM = AC descritta tra gli asintoti O*a*, OE l'Iperbole equilatera *gd*, si conduca per H la retta G*g* parallela all'asse OC, e recidente in *g* la detta Iperbole *gd* tagliata ancora dalla M*a* in *d*.

La PO, ovvero la K*b*, ovvero lo spazio Iperbolico *adgb* esprimerà il logaritmo negativo del numero denotato dalla O*b* = CH; ma lo spazio iperbolico *adgb* è visibilmente eguale allo spazio iperbolico ADGH; dunque ancora lo spazio ADGH esprime il logaritmo negativo della CH.

CO-

COROLLARIO III.

307. Giacchè l' istessa cosa è considerare l' applicata da se sola, quanto moltiplicata nell' indivisibile, o elemento dell' ascissa (255.), ne segue il Canone I. cioè *l' indivisibile, o elemento del logaritmo d' una quantità qualunque variabile eguaglia l' indivisibile, o elemento di tal quantità partito per la quantità medesima.*

COROLLARIO IV.

308. Quindi si avrà viceversa il Canone II. cioè *la somma d' un quoziente, di cui il numeratore sia l' unità, e il divisore variabile, è il logaritmo di tal divisore.*

SCOLIO II.

309. Avvertasi, che la quantità elementare $\frac{1}{CQ}$ (*Fig. medesima*) può aver due somme diverse, l'una delle quali è il logaritmo di CQ, e l'altra è $\frac{1}{0}$, cioè nel primo caso l'area asintotica limitata QNDA, e nel secondo caso l'illimitata QNVC (92.); così assumendo i simboli del calcolo infinitesimale, due ponno essere l'integrazioni della formula $\frac{dx}{x}$, cioè $l.x$, come ancora $\frac{1}{0}$; bisogna dunque star cauti nel trattare astrattamente il calcolo, di non pigliarle amendue promiscuamente come conducenti all' istesso fine, nella

qua-

quale inavvertenza sono caduti il Wolfio [a], e M. de Bougainville [b], ma conviene servirsi or dell' una, or dell' altra, secondo la condizione del Problema che si ha tra mano.

S C O L I O III.

310. Bisogna distinguere l' unità aritmetica dall' unità geometrica, o sia l' unità numerica dall' unità lineare. In questo metodo l' indivisibile dell' ascissa fa figura d' unità numerica (254.), onde se vi fosse un' altra unità lineare, le và dopo il computo sostituito il suo equivalente; così quando si è detto essere $QN = \frac{1}{1+AQ}$ (303.), si è supposto, che l' unità significhi il lato della potenza dell' Iperbole, sicchè sostituendo a tal unità la CA, si avrebbe $QN = \frac{\overline{CA}^2}{CA+AQ}$. Serva dunque ciò di cautela tanto per gli Esempj addotti, quanto per quelli, che s' addurranno, a fine d' evitare ogni equivoco.

CA-

(a) *Elem. Math. Univ. T. II.* §. 102. *Chap. I.* §. *III.*
(b) *Traité du Calcul Integral Par. I.*

CAPITOLO QUINTO.

Nuovamente delle Tangenti.

PROPOSIZIONE XXI.

311. T*Rovar la sottangente d' una data curva algebrica;* Siccome la sottangente d' una curva è il quoziente nato dalla partizione dell' applicata per il suo indivisibile (252.), trovisi nella proposta equazione l' indivisibile all' equivalente dell' applicata, e per esso indivisibile dividasi tal equivalente; il quoziente, che ne nascerà, darà la sottangente richiesta. Il che &c.

ESEMPIO I.

312. Sia l' equazione $\overline{PM}^{n} = AP$, ovvero $PM = \overline{AP}^{\frac{1}{n}}$ l' indivisibile di $\overline{AP}^{\frac{1}{n}}$ (equivalente dell' applicata PM) sarà $\frac{1}{n}\overline{AP}^{\frac{1}{n}-1}$, per cui diviso $\overline{AP}^{\frac{1}{n}}$, il quoto sarà nAP, che

col

col ſegno poſitivo darà la ſottangente all'infinite Parabole, e col ſegno negativo all'infinite Iperboli tra gli aſintoti, appunto come ſopra (22. 26.).

ESEMPIO II.

313. Sia l'equazione $\overline{PM}^{n} = AP \pm \overline{AP}^{2}$, cioè col ſegno negativo ad infiniti cerchj, e col poſitivo ad infinite Iperboli riferite agli aſſi; facciaſi $PM = (AP \pm \overline{AP}^{2})^{\frac{1}{n}}$, il di cui indiviſibile è $\frac{1}{n}(AP \pm \overline{AP}^{2})^{\frac{1}{n}-1} \times (1 \pm 2AP) =$ $\frac{(AP \pm \overline{AP}^{2})^{\frac{1}{n}} \times (1 \pm 2AP)}{n(AP \pm \overline{AP}^{2})}$ (264.), per cui diviſo $(AP \pm \overline{AP}^{2})^{\frac{1}{n}}$ il quoziente $\frac{n(AP \pm \overline{AP}^{2})}{1 \pm 2AP}$ darà la formula delle ſottangenti per le curve compreſe nella propoſta equazione.

ESEMPIO III.

314. Sia l'equazione $RM = \frac{\overline{AR}^{2}}{\sqrt{(AR - \overline{AR}^{2})}}$ alla Ciſſoide AM (*Fig.* 46.) di Diocle. L'indiviſibile della quantità $\frac{\overline{AR}^{2}}{\sqrt{(AR - \overline{AR}^{2})}}$ ſarà $\frac{3\overline{AR}^{2} - 2\overline{AR}^{3}}{2\sqrt{(AR - \overline{AR}^{2})} \times (AR - \overline{AR}^{2})}$ (287.); per queſto indiviſibi-

le

le dividasi detta quantità, il quoziente $\frac{(AC - AR) \times 2AR}{3AC - 2AR}$ darà il valore della cercata sottangente.

Esempio IV.

315. Sia ad infiniti Circoli, Circoloidi &c. l' equazione $PM = \left(\overline{AP}^{n} - \overline{AP}^{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}}$; l' espressione generale alle sottangenti di tali infinite curve sarà $\frac{(n+1)\left(\overline{AP}^{n} - \overline{AP}^{n+1}\right)}{n\overline{AP}^{n-1} - (n+1)\overline{AP}^{n}} =$

$\frac{(n+1)\left(AP - \overline{AP}^{2}\right)}{n - nAP - AP}$, dividendo sotto, e sopra per $\overline{AP}^{n-1}$.

Esempio V.

316 Sia all' infinite Ellissi, Ellissoidi &c. col segno negativo, e all' infinite Iperboli, Iperboloidi &c. col segno positivo l' equazione $PM = \left(Q \times \overline{AP}^{m} \times (1 \mp \overline{AP})^{n}\right)^{\frac{1}{m+n}}$, dove il maggior asse sia 1, e Q il parametro; l' espressione generale alle sottangenti di tali curve infinite sarà

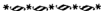
$$\frac{(m+n)\, Q \times \overline{AP}^{m} \times (1 \mp AP)^{n}}{mQ \times \overline{AP}^{m-1} \times (1 \mp AP)^{n} \mp nQ \times \overline{AP}^{m} \times (1 \mp AP)^{n-1}} \quad (276.);$$

e di-

e dividendo tanto il numeratore, quanto il denominatore, per $Q \times \overline{AP}^{m-1} (1 \mp AP)^{n-1}$, la detta espressione finalmente sarà $\frac{(m+n) AP \mp \overline{AP}^2}{m \mp m AP \mp n AP}$.

CAPITOLO SESTO.

Della Rettificazione delle Curve.

~~*~*~*

PROPOSIZIONE XXII.

317. D*Ata qualunque curva, trovarne un' altra le di cui aree intorno ad un asse comune siano proporzionali agli archi corrispondenti della data curva.*

Sia AMB (*Fig.* 55. 87. 88. 89. 90. 91.) la data curva. Dal punto M tirata la tangente MT, e l'indefinita MN (*Fig.* 55. 87. 88. 89.) parallela all'asse AP (che nelle figure 55. 87. segherà in R la retta AR condotta dal vertice A di detta curva parallelamente alle basi BI, BC; e nelle figure 88. 89. taglierà la base BI) facciasi PM : MT :: 1 : RN, e così sempre; ma nelle figure 90. 91. estendasi la semiordinata MP in maniera, che sia sempre PT : TM :: 1 : PN; dico, che ogni area natane AVNR (*Fig.* 55. 87.), IDNR (*Fig.* 88. 89.), AVNP (*Fig.* 90.), EVNP (*Fig.* 91.) sta come il corrispondente arco AM.

Imperciocche tirata alla MRN (*Fig.* 55. 87. 88. 89.) l'infinitamente prossima *mrn*, e alla MPN (*Fig.* 90. 91.) similmente la *mpn*, indi condotta in tutte le dette figure la normal-

ma-

male M*o*, per la ſimilitudine de' triangoli MPT, M*om*, ſarà M*o* (*Fig.* 55. 87. 88. 89.), ovvero R*r*:M*m*::PM:MT::1:RN; onde NR$\times$R*r*=M*m*. Parimente ſarà (*Fig.* 90. 91.) P*p*:M*m*::1:PN; quindi NP$\times$P*p*=M*m*; dunque ſommando, ogn'area coſtrutta nel modo eſpoſto ſarà al corriſpondente arco AM proporzionale; il che &c.

Corollario I.

318. Tirata al vertice A (*Fig.* 55. 88.) la tangente AH ſegante in H la tangente TML, che incontri in L la prolungata IB parallela alla detta AH; indi preſa la coſtante AI per l'unità, ſe faraſſi AI: HL::AI: RN, ſarà RN =HL; onde prolungate le MR in N talmente, che ſia ſempre RN=HL tangente corriſpondente, l'area AVNR, ovvero BVNR, che ne naſcerà, e che potrà facilmente coſtruirſi, ſarà proporzionale all'arco AM, giacchè AI: HL:: AT:TH::PT:TM. Col medeſimo raziocinio, prolungata nella figura 90. la MP in N in modo, che ſia PN=HL tangente, ſi dimoſtrerà, che l'area natane AVNP ſtarà come l'arco AM. Ma nella figura 89. prolungata la tangente TH finchè incontri in L l'eſteſa CB, e preſa la baſe BF=CA per coſtante, eſſendo CA (BF):HL::CT:TL:: AT:TH::PM:MT, avremo PM:MT::BF:HL::CA:RN =HL; fatte dunque tutte le RN eguali alle tangenti corriſpondenti HL, ſe ne coſtruirà l'area IDNR proporzionale all'arco AM. Parimente fatta coſtante nella figura 87. la baſe BC=AI, e condotta la tangente TM a ferire in L la IB prolungata, ſi dimoſtrerà col medeſimo diſcorſo, che

pre-

prese tutte le RN eguali alle tangenti corrispondenti TL; l'area natane AVNR starà come l'arco AM; e nella figura *91*. per la similitudine de' triangoli GHL, MPT, fatta PN=HL, l'area EVNP starà anch' essa come l'arco AM.

Corollario. II.

319. E' chiarissimo, che divisa l'area AVNR (*Fig.* 55. 87.), IDNR (*Fig.* 88. 89.), AVNP (*Fig. 90.*), EVNP (*Fig. 91.*) per la presa quantità costante, qualunque siasi, il quoziente eguaglierà l'arco AM.

Corollario III.

320. Essendo alla curva VND (*Fig.* 55. 87. 88. 89.) l'equazione generale $RN = \frac{TM}{PM}$, ovvero $\overline{RN}^2 = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{\overline{PM}^2} = 1 + \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PM}^2}$; come ancora (*Fig. 90. 91.*) $PN = \frac{MT}{PT}$, ovvero $\overline{PN}^2 = \frac{\overline{PT}^2 + \overline{PM}^2}{\overline{PT}^2} = 1 \frac{+\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2}$; se a tali formule si sostituiranno gli equivalenti in termini o di AR, o di IR, o di AP, se n' otterrà l'equazione particolare, che ne determinerà la natura.

S C O L I O.

321. Notisi 1.) che si può tra le sei proposte figure sceglier quella, che contribuisce ad una più facile, e più netta costruzione della curva cercata, colla circospezione, che se la sottangente è maggior dell' ascissa, la costruzione dev' essere a norma delle figure 55. 88. 90.; viceversa a norma delle figure 87. 89. 91., come dalla loro ispezione facilmente riconoscesi. 2.) Che il rapporto, o la misura dell' arco AM può ottenersi col proposto metodo (317.) per, mezzo di due curve di natura diversa 3.) Che l'aree di tali due curve proporzionalmente corrispondenti all' istess' arco AM sono eguali quando le divide la medesima quantità costante; onde se d' una fosse cognita la quadratura, lo sarà ancora dell' altra 4.) Che questa Proposizione riguardo alla figura 90. è nel suo fondo l' istessa della Proposizione X. (140.), o almeno un di lei Corollario; imperciocchè supposto, che l'arco AM sia disteso sulla retta PQ, che serva d' applicata alla curva AQG, si tratta di trovare la curva VND contenente li spazj AVNP ad esse PQ proporzionali; onde la presente Proposizione si può dimostrare col metodo di quella in tal guisa. Tirata al punto Q la tangente Qt, siccome l'area AVNP$=$P$t\times$PN (78.), si avrà P$t\times$PN $=$PQ; quindi PN$=\frac{PQ}{Pt}$; ma P$t=\frac{PT\times PQ}{MT}$ (37.); dunque PN$=\frac{MT}{PT}$; il che dà l' analogia PT:TM::1:PN:: oM:Mm &c. Il medesimo può dimostrarsi nella figura 91., com' è evidente. 5.) Si poteva ancora trovare il valore del-

la

la Mm, facendo $Mm = \sqrt{(\overline{mo}^2 + \overline{Mo}^2)} = \sqrt{(1 + \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2})}$ (251. 254.); come pure fatta l'analogia (*Fig.* 55. 87. 88.) $mo : Mm :: PT : MT$; ovvero (*Fig.* 89. 90. 91.) $Mo : Mm :: PT : MT$, se ne sarebbe ricavata l'equazione $Mm = \frac{MT}{PT} = \sqrt{(1 + \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2})}$, che confronta coll'antecedente (321.); ma è preferibile l'esposto primo metodo, da cui deduconsi due soluzioni del Problema, il che da questi altri due non si ottiene. *6.*) Nelle figure 55. 87. 88. 89. l'equazione deve farsi all'applicata PM, e nelle figure 90. 91. all'ascissa AP. *7.*) Se per tangente si fosse presa la ML, e si fosse descritta la curva DNV secondo l'esposto metodo, l'area d'una tal curva starebbe come l'arco BM, quando ancora B non fosse l'origine della curva BMA. 8.) Il Problema generale riguardante la rettificazione delle curve si riduce a quello delle quadrature.

DEFINIZIONE XIII.

322. La curva DNV si chiamerà *rettificatrice* della curva AM.

ESEMPIO I.

323. *N. 1.* Sia AM (*Fig.* 90.) una Cicloide, o Trocoide comune, il di cui cerchio genitore AFI, siccome PN

=

$= \frac{TM}{TP} = \frac{AF}{AP}$ (42. 43.) $= \frac{1}{\sqrt{AP}}$, l'equazione alla curva VND farà $\overline{PN}^2 = \frac{1}{AP}$, il che indica, esser essa un'Iperbole tra gli asintoti, la quadratura del di cui spazio AEVNP è $2AP \times PN$ (89.) $= 2AF$; onde l'arco della Cicloide eguaglia il doppio della corda corrispondente del cerchio genitore.

N. 2. Sia di nuovo AM una Cicloide; giacchè la rettificazione dell'arco AM eguaglia la somma di $\frac{TM}{TP}$, cioè di $\frac{AF}{AP}$, ovvero di $\overline{AI}^{\frac{1}{2}} \times \overline{AP}^{-\frac{1}{2}}$, e questa somma è $2\sqrt{(AI \times AP)} = 2AF$, l'arco AM eguaglierà come sopra il doppio della corda corrispondente del cerchio genitore.

N. 3. Sia nuovamente AM (*Fig.* 88.) una Cicloide, il di cui cerchio genitore AFI; per essere $\overline{RN}^2 = \frac{\overline{MT}^2}{\overline{PM}^2}$ (321.) $= \frac{\overline{AF}^2}{\overline{FP}^2}$ (42. 43.) $= \frac{I}{PI} = \frac{1}{MR}$, ne verrà, che la curva rettificatrice DNV avrà i quadrati dell'applicate RN reciproci all'applicate MR di essa Cicloide riguardo all'altr'asse BI; onde BV sarà suo asintoto; e se si piglierà l'arco AM eguale all'arco AM della figura 90., anche l'area RNDI eguaglierà l'area AVNP, e perciò sarà quadrabile; le medesime conseguenze ricavansi anche dalla figura 55.

COROLLARIO I.

324. Essendo nel cerchio AFI il quadrato della corda AF (*Fig.* 90.) proporzionale alla AP, se questa si riguardi come asse, a cui sia ordinata la detta AF, ne nascerà una Parabola; e per la medesima ragione se fatta la PQ=2AF (eguale cioè all'arco cicloidale AM), si ordinerà all'asse AP, la curva AQG, che ne risulterà, sarà parimente una Pararabola; onde gli archi della Cicloide stanno come l'ordinate della Parabola Apolloniana intorno ad un asse comune.

COROLLARIO II.

325. Siccome poi l'ordinate della Parabola Apolloniana stanno come l'aree della detta Iperbole cubica tra gli asintoti (61.), anche gli archi cicloidali staranno come l'aree di tal' Iperbole; il che serve di riprova al *N.* 1. dell'Esempio presente.

COROLLARIO III.

326. L'arco della semicicloide AMB (*Fig.* 90.) sarà doppio del diametro AI del cerchio genitore AFI, onde l'arco totale dell'intera Cicloide eguaglierà il quadruplo del diametro di detto cerchio genitore.

ESEMPIO II.

327. *N.* 1. Sia AM (*Fig.* 90.) un cerchio, il di cui centro C. Per essere TP:TM::PM:MC::1:PN, sarà PN

=

$= \frac{MC}{PM}$; onde essendo costante ancora la MC, sarà la PN in ragion reciproca della semiordinata PM; dunque li spazj curvilinei della curva reciproca al cerchio staranno come i corrispondenti archi circolari, nella guisa appunto che altrove si è dimostrato (62.).

N. 2. Sia di nuovo AMB (*Fig.* 55.) un quadrante di cerchio, il di cui centro I; avrassi $RN = \frac{TM}{PM} = \frac{IM}{IP} = \frac{1}{IP}$, fatto $MI = 1$; onde la curva rettificatrice DNV risulterà d'ordinate RN reciprocamente proporzionali alle sunnormali circolari corrispondenti IP; cioè sarà in ragion reciproca delle applicate corrispondenti ME relativamente all'asse BI del detto quadrante ABG, ed avrà per asintoto KD, appunto come nel numero antecedente. L'istesso dimostrasi con la figura 88.

Corollario.

328. Si potrà dunque dividere la figura AVNDI (*Fig.* 90.) reciproca del cerchio in quella data ragione, in cui può esser divisa la periferia circolare.

Esempio III.

329. *N.* 1. Sia AM (*Fig.* 89.) una Trattoria, sarà la $RN = \frac{TM}{PM}$, cioè per esser costante la tangente TM per la natura di questa curva (117.), la RN starà come $\frac{1}{PM}$, cioè

in ragione inversa di IR, onde la curva VN sarà un' Iperbole ordinaria tra gli asintoti IR, ID, il di cui centro I; e l' arco AM della Trattoria starà come il trapezio iperbolico FDNR, tirata AD parallela a TI; vale a dire che la rettificazione degli archi della Trattoria dipende dalla quadratura delli spazj iperbolici, e che può ottenersene in conseguenza co' logaritmi la relazione (68. 70.).

N. 2. Sia replicatamente AM (*Fig.* 91.) una Trattoria, in cui essendo $PN = \frac{TM}{PT} = \frac{1}{PT}$, ne verrà, che le applicate PN della curva rettificatrice VND saranno reciproche alle sottangenti di essa Trattoria; ovvero per essere $\overline{PT}^2 = 1 - \overline{PM}^2$, l'equazione alla detta curva VND sarà $\overline{PN}^2 = \frac{1}{1 - \overline{PM}^2}$; onde le PN staranno in ragion reciproca di $\sqrt{(1 - \overline{PM}^2)}$, e pigliatane la somma, tutta l'area VNPE, e in conseguenza l'arco AM starà come il logaritmo di $\sqrt{(1 - \overline{PM}^2)}$ (308.); vale a dire gli archi della Trattoria saranno esprimibili co' logaritmi, come sopra.

S C O L I O.

330. Piacemi dimostrare la verità di quest' Esempio anche in tal guisa. Sia AM (*Fig.* 24.) una curva qualunque, e supposta la costruzione della figura nel modo superiormente accennato (110.), per i triangoli simili MSO, *Msm*, si

avrà

avrà $Mm = \frac{MO \times Mr}{MS} = \frac{Pp \times MO}{PC}$; ficchè fe la curva DN farà un' Iperbole Apolloniana tra gli afintoti VC, CA, ftarà Mm, come $Pp \times PN \times MO$; onde fe MO foffe coftante, ftarebbe Mm, come $Pp \times PN$; ma non v'è altra curva fuori della Trattoria, che abbia coftante la tangente; dunque fuppofto, che la curva AM fia una Trattoria, le porzioni AM del fuo perimetro ftaranno come l' aree iperboliche ADNP, e perciò fi potranno efprimere per mezzo de' logaritmi.

Corollario.

331. Effendofi veduto, che li fpazj iperbolici ftanno come l' applicate della Logiftica (*67. 71.*), fe diftefi in linea retta gli archi della Trattoria fi applicheranno a' punti corrifpondenti del fuo afintoto, ne nafcerà una Logiftica.

Esempio IV.

332. Sia AM (*Fig.* 88.) una Parabola Apolloniana, la di cui equazione $AP = \overline{PM}^2$, e la di cui fottangente PT $= 2AP$ (18. 312.), farà $\overline{RN}^2 = \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PM}^2} + 1 = 1 + 4\overline{PM}^2 = 1 + 4\overline{IR}^2$, qual'equazione è per le Sezioni Coniche all' Iperbole Apolloniana, computate l'afciffe dal centro I, il di cui affe trafverfo DK è doppio della DI, e di cui è molto facile

la

la costruzione; imperciocchè fatta la IE doppia della IR, e alla congiunta DE fatta eguale la RN, sarà $\overline{RN}^2 = 1 + 4\overline{IR}^2$, presa DI per l'unità; onde avremo $DS = RN - 1$, $KS = 1 + RN$, $KS \times SD = \overline{RN}^2 - 1$. Sia ora A il parametro, sarà $A : 1 :: 4\overline{IR}^2 : \overline{RN}^2 - 1$; $4\overline{IR}^2 = A \times \overline{RN}^2 - A$; $A + 4\overline{IR}^2 = A \times \overline{RN}^2$; $1 + \frac{4\overline{IR}^2}{A} = \overline{RN}^2$; sicchè se il parametro A sarà eguale alla costante DI, l'Iperbole DN sarà equilatera, ed avremo $1 + 4\overline{IR}^2 = \overline{RN}^2$; ma se il parametro non eguaglierà la DI, la DN sarà un'Iperbole scalena; dal che inferiscesi, che gli archi Parabolici stanno come li spazj esteriori dell'Iperbole Apolloniana, e che in conseguenza la rettificazione della Parabola dipende dalla quadratura dell'Iperbole.

E S E M P I O V.

333. Sia AM (*Fig. 91.*) una Logistica ordinaria, il di cui asintoto IT; per esser TP costante, sarà $PN = TM$; cioè nella rettificatrice della Logistica l'applicate sono eguali, o proporzionali alle tangenti di essa Logistica. Presa poi la figura 89., sarà la $RN = \frac{TM}{PM} = \frac{\sqrt{(1 + \overline{PM}^2)}}{PM}$; onde $\overline{RN}^2 = 1 + \frac{1}{\overline{PM}^2} = 1 + \frac{1}{\overline{IR}^2}$.

E.

E S E M P I O VI.

334. Sia PBF (*Fig.* 15.) una Logaritmica ſpirale; ſiccome i ſuoi rami AP alle ſue ſottangenti AT ſono in un rapporto coſtante (51.), lo ſaranno ancora a cauſa de' triangoli rettangoli PAT i ſuoi rami AP alle ſue tangenti PT; onde la figura rettificatrice di tal curva ſarà un rettangolo; preſo dunque il raggio AC per coſtante, l'altezza di tal rettangolo ſarà la tangente PT eguale in conſeguenza a tutto il perimetro curvilineo PDFA; ſicchè anche la tangente Fr eguaglierà il perimetro FA.

E S E M P I O VII.

335. N. 1. Sia l'equazione generale $AP = \overline{cM}^{n}$ (intendendo per n un numero qualunque poſitivo intero, o rotto), che è all' infinite Parabole poſſibili, le quali, quando n è maggiore dell' unità, e in conſeguenza quando la ſottangente è maggiore dell' aſciſſa, rivolgono la concavità all' aſſe, e che ad eſſo oppongono la conveſſità quando n è minore dell' unità, e in conſeguenza quando la ſottangente è minore dell' aſciſſa (22.). Per eſſere la ſottangente PT (*Fig.* 90. 92.) $= n AP$ (*l. cit.*), avremo $\overline{PT}^2 = n^2 \overline{AP}^2$; onde ſarà $\overline{PN}^2 = 1 + \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2} = 1 + \frac{1}{n^2} \overline{AP}^{\frac{2}{n} - 2}$, qual eſponente $\frac{2}{n} - 2$, quando n è un

rotto

rotto minore dell'unità, essendo sempre affermativo, indica, che l'equazione è ad innumerabili Iperboli riferite agli assi conjugati, l'ascisse delle quali son computate dal centro; inclusovi anche il caso, in cui $n = \frac{2}{3}$, quantunque l'equazione $\overline{PN}^2 = \frac{9}{4}\ AP + 1$ possa essere ancora ad una Parabola conica troncata, rivolgente la concavità all'asse AP.

N. 2. Sia nuovamente l' equazione generale $AP = \overline{PM}^n$ all'universe Parabole, pigliando sempre n per un numero positivo qualunque rotto, o intero. Per essere la sottangente PT (*Fig.* 55. 87. 88.) $= nAP = n\overline{PM}^n$, avremo $\overline{RN}^2 = 1 + \frac{\overline{PT}^2}{\overline{PM}^2} = 1 + n^2\overline{MP}^{2n-2} = 1 + n^2\overline{AR}^{2n-2}$ (*Fig.* 55. 87.) $= 1 + n^2\ \overline{IR}^{2n-2}$ (*Fig.* 88.); sicchè quando n sia un numero maggiore dell'unità, l' esponente $2n-2$ dovrà esser sempre affermativo, e perciò allora l' equazione è nuovamente ad interminabili Iperboli riferite agli assi conjugati, l'ascisse delle quali son computate dal centro; inclusovi anche il caso, in cui $n = \frac{3}{2}$, quantunque l'equazione $\overline{RN}^2 = \frac{9}{4}\ IR + 1$, come nel numero antecedente, possa essere ancora ad una Parabola conica troncata, rivolgente parimente la cavità all'asse IR.

Dal

Dal che deducesi, che tutte le Parabole di qualsivoglia genere in infinito riconoscono le nominate Iperboli, o Iperboloidi per rettificatrici de'loro archi, e perciò tali archi saranno all'aree esteriori di dette Iperboli proporzionali.

COROLLARIO I.

336. Se nella prima equazione $\overline{PN}^2 = 1 + \frac{1}{n^2}\overline{AP}^{\frac{2}{n}-2}$ (*Fig.* 90.) fosse la quantità n maggiore dell'unità, l'esponente $\frac{2}{n}-2$ sarà sempre negativo; e se nella seconda equazione $\overline{RN}^2 = 1 + n^2\overline{AR}^{2n-2}$ (*Fig.* 87.) la quantità n sarà minore dell'unità, l'esponente $2n-2$ sarà parimente negativo; onde ne risulteranno innumerabili altre curve rettificatrici delle Parabole, diverse dalle accennate Iperboli, quali curve, supposto, che la presa quantità costante sia comune, e l'arco Parabolico sia l'istesso, avranno l'aree eguali all'aree iperboliche rettificatrici del medesimo arco, e però se le dette aree iperboliche saranno quadrabili, l'aree di tali curve porteranno seco l'istessa misura (321. *N.* 3.).

COROLLARIO II.

337. Prolungata la ID (*Fig.* 88.) da ambe le parti, facciasi IK=ID, IS=RN, e giungasi SN, che sarà un'applicata all'asse DS della curva DN; avremo per gli Elementi $\overline{RN}^2 - \overline{ID}^2 = \overline{RN}^2 - 1 = KS \times SD = KD \times DS + \overline{DS}^2$; on-

 de

de ſi otterrà un'altra equazione alla curva DN, cioè per eſſere $\overline{RN}^2 - 1 = n^2 \overline{IR}^{2n-2}$, ſi avrà $\overline{IR}^{2n-2} = \frac{KD \times DS + \overline{DS}^2}{n^2}$, qual' equazione è all'infinite Iperboli DN di prima, con la differenza ſoltanto, che le aſciſſe non ſono più computate dal centro, ma dal vertice della curva.

Corollario III.

338. Parimente prolungata come nel Corollario precedente la AV (*Fig.* 92.) da amendue le parti, fatte AK = AV, AS = PN, e giunta SN, ſi dimoſtrerà col medeſimo metodo, che l'equazione alla curva VN è $\overline{AP}^{\frac{2}{n}-2} = n^2(KV \times VS + \overline{VS}^2)$, e che perciò le curve VN ſono l'iſteſſe Iperboli di prima, colla ſola enunciata diverſità d'eſſer riguardate da un'altro lato.

Corollario IV.

339. L'Iperboli dunque rettificatrici delle Parabole hanno le potenze delle applicate proporzionali al rettangolo dell'aſciſſa nella ſomma dell'aſciſſa medeſima, e dell'aſſe traſverſo.

Corollario V.

340. Quindi eſſendo (*Fig.* 88.) SN $= \left(\frac{KD \times DS + \overline{DS}^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n-2}}$

co-

come ancora (*Fig.* 92.) $SN = n^2 (KV \times VS + \overline{VS}^2)^{\frac{n}{2-2n}}$, quando sia il primo esponente $\frac{1}{2n-2} = m$, ovvero il secondo $\frac{n}{2-2n} = m$ (intendendo per m un numero intero affermativo) cioè quando nel primo esponente sia $n = \frac{2m+1}{2m}$, e nel secondo $n = \frac{2m}{2m+1}$, è chiaro per le cose dette (302.), che l'aree comprese da tali innumerabili curve iperboliche saranno quadrabili, e che in conseguenza vi sono innumerabili curve Paraboliche assolutamente rettificabili.

S c o l i o I.

341. Osservisi, che quando $n = \frac{3}{2}$, l'esponente $\frac{1}{2n-2}$ diviene $= 1$; e che quando $n = \frac{2}{3}$ l'esponente $\frac{n}{2-2n}$ diviene parimente $= 1$; onde nel primo caso l'equazione alla curva rettificatrice dell'arco Parabolico sotto l'equazione $AP = \overline{PM}^{\frac{3}{2}}$ sarà (*Fig.* 88.) IR, ovvero $SN = \frac{4}{9} KD \times DS + \frac{4}{9} \overline{DS}^2$; nel secondo caso poi l'equazione alla curva rettificatrice dell'arco Parabolico sotto l'equazione $AP = \overline{PM}^{\frac{2}{3}}$ (*Fig.*

 92.)

92.) farà AP, ovvero $SN = \frac{4}{9}KV \times VS + \frac{4}{9}\overline{VS}^2$; sicchè le Parabole troncate espresse dall'equazioni addotte nel numero primo, e secondo di quest'Esempio coincidono coll'aree iperboliche del suddetto carattere, e perciò l'ho incluse nella serie delle suddette Iperboli rettificatrici delle Parabole (336.).

COROLLARIO VI.

342. Se l'equazione proposta fosse stata $IP = \overline{PM}^{-n}$ (*F.* 93.) all'infinite Iperboli tra gli asintoti, cioè se la quantità *n* fosse stata negativa, si sarebbe trovato $\overline{RN}^2 = 1 + n^2\overline{IR}^{-2n-2}$ per equazione alle curve NV rettificatrici di tali Iperboli.

COROLLARIO VII.

343. Un'altra equazione alle dette curve rettificatrici NV delle Iperboli tra gli asintoti si troverà col medesimo metodo sopra esposto, facendo $IK = ID$, $IS = RN$, e giunta la SN, che farà un'applicata d'essa curva NV; si avrà come quì sopra $\overline{RN}^2 - 1$, ovvero $\overline{IS}^2 - 1 = KD \times DS + \overline{DS}^2$, e finalmente $\overline{SN}^{-2n-2} = \frac{KD \times DS + \overline{DS}^2}{n^2}$.

Co-

COROLLARIO VIII.

344. Dunque le curve rettificatrici dell' Iperboli tra gli asintoti hanno le potenze negative dell' applicate proporzionali al rettangolo dell' ascissa nella somma dell' ascissa, e del loro lato trasverso; cioè sono curve reciproche dell' Iperboli, che rettificano le Parabole.

COROLLARIO. IX.

345. Quindi tali curve NV saranno anch' esse tra gli asintoti DG, DS; sicchè condotta la AV parallela all' asse PI fino all' incontro della curva NV in V, l' area asintotica RNVI misurerà l' arco indefinito MX, e l' area RNVF misurerà il corrispondente arco determinato AM.

SCOLIO II.

346. Siccome facendo alla curva VND (*Fig.* 88.) l' equazione $\overline{RN}^2 - 1 = \frac{\overline{PT}^3}{\overline{PM}^3}$, ovvero $KS \times SD = \frac{\overline{PT}^3}{\overline{PM}^3}$, coll' avvertenza di porre il valore $\overline{PT}^2$ in termini di $PM = SN$; alla curva VND (*Fig.* 92.) l' equazione $\overline{PN}^2 - 1 = \frac{\overline{PM}^3}{\overline{PT}^3}$,

ov-

ovvero $KS \times SV = \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2}$, coll'avvertenza di porre il valore $\frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2}$ in termini di $AP = SN$, la detta curva VND non resta, come si è veduto, alterata, ma si considera soltanto sotto diverso aspetto; comprendesi facilmente, che ritenuto in qualunque curva da rettificarsi l'istesso arco coll'istessa quantità costante, la curva rettificatrice aderente ad una delle coordinate sarà reciproca alla curva rettificatrice aderente all'altra coordinata.

347. Chi poi volesse un'altra equazione alla curva DN (*Fig.* 88.), abbassata la MG normale in M alla curva AM, giacchè vi è per la costruzione l'analogia $\overline{MT}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{RN}^2 : \overline{ID}^2$, sarà dividendo, $\overline{TM}^2 - \overline{MP}^2 \left(\overline{PT}^2\right) : \overline{PM}^2 :: \overline{RN}^2 - \overline{ID}^2 \left(\overline{IS}^2 - \overline{ID}^2\right) : \overline{ID}^2 :: KS \times SD : \overline{ID}^2 :: \overline{PM}^2 \left(\overline{SN}^2\right) : \overline{PG}^2$; onde $\overline{SN}^2 = \frac{\overline{PG}^2 \times KS \times SD}{\overline{ID}^2}$. La medesima equazione trovasi quando la curva AM rivolgesse la convessità all'asse AP, come nella figura 87., il che è per se manifesto, facendo la debita costruzione. Parimente per le cose dette (318.) espressa la tangente HL in termini dell'applicata della curva AM riguardo alle figure 55. 88. 89., ovvero in termini dell'ascissa rispetto alle figure 90. 91., indi facendo di tal valore l'equazione alla RN nelle figure 55. 88. 89., ovvero alla PN nelle figure 90. 91., si conoscerà anche in tal guisa la natura della curva rettificatrice DN. CA-

CAPITOLO SETTIMO.

Delle Cubature.

DEFINIZIONE XIV.

348. *Cubare* un solido significa trovare la dimensione della sua solidità.

PROPOSIZIONE XXIII.

349. *Cubare un solido nato dalla conversione d' una figura piana ABC (Fig. 94.) intorno all' asse AC.*

Siccome gl' indivisibili, o gli elementi di un tal solido sono i cerchj paralleli alla base BC, e in conseguenza tra loro, ne' quali può tutto il solido esser decomposto (240.), dato il valore d' uno di tali cerchj, e trovatane poscia la somma, è chiaro, che sarà noto tutto il solido; fatto dunque il rapporto del raggio alla periferia come $r : p$, la periferia circolare descritta dal raggio PM sarà $\frac{p \times PM}{r}$, e in conseguenza il cerchio, che ha per raggio la PM, sarà

$p \times$

$\frac{p \times \overline{PM}^2}{2r}$; onde sostituiti i valori in termini di AP, e fattane la somma, si verrà in cognizione de' solidi proposti ne' casi particolari.

Corollario.

350. Quantunque l'origine della curva AMB sia in A, se si volesse far rotare la figura BAC intorno l'asse BC, si troverà nel modo istesso il solido, che ne risulta, ponendo ne' casi speciali in termini di $BQ = CB - PM$ la formula $\frac{p \times \overline{QM}^2}{2r}$, indi facendone la somma; sicchè il medesimo metodo può servire per qualunque altra rotazione d'una figura intorno ad un asse a fine di formarne un solido a piacere.

Esempio I.

351. Giacchè il Cono ABD (*Fig.* 95.) nasce dalla conversione del triangolo ABC intorno all' asse immobile AC, sarà $\overline{PM}^2 = \frac{\overline{BC}^2 \times \overline{AP}^2}{\overline{AC}^2}$; onde la somma di $\frac{p \times \overline{BC}^2 \times \overline{AP}^2}{2r \times \overline{AC}^2}$ sarà $\frac{p \times \overline{BC}^2 \times \overline{AP}^3}{6r \times \overline{AC}^2}$; e fatto $AP = AC$, $BC = r$, la solidità di tutto il Cono ABD sarà $\frac{p \times BC \times AC}{6} = \frac{1}{2} p \times BC \times \frac{1}{3} AC$; vale a dire il prodotto della base nella terza parte dell' altezza, come appunto deve essere.

Co-

Corollario.

352. Dunque il Cono è la terza parte del cilindro, che ha comune con esso la base, e l'altezza.

Esempio II.

353. Sia l'Emisfero BMAND (*Fig. 96.*) prodotto dalla rotazione del quadrante ABC intorno al raggio immobile AC; fatto $AC = 1$, sarà per la natura del cerchio $\overline{PM}^2 = 2AP - \overline{AP}^2$, qual valore sostituito nella formula generale, ne verrà $\frac{2p \times AP - p \times \overline{AP}^2}{2r}$, la di cui somma $\frac{p \times \overline{AP}^2}{2r} - \frac{p \times \overline{AP}^3}{6r} = \frac{3p \times \overline{AP}^2 - p \times \overline{AP}^3}{6r}$ darà la solidità del segmento sferico indeterminato MAN; e fatto, che AP divenga AC, e che sia BC, ovvero $AC = 1 = r$, la solidità dell'Emisfero BMAND sarà $\frac{3p \times \overline{AC}^2 - p \times \overline{AC}^3}{6} = \frac{1}{3} p \times \overline{AC}^2$; eguale cioè al rettangolo del raggio BC, o sia AC nella sua periferia da moltiplicarsi nella terza parte del raggio, ovvero al cerchio massimo condotto in due terzi del raggio; onde il doppio di tal quantità, cioe $\frac{2}{3} p \times \overline{AC}^2$, darà la solidità di tutta la sfera, che sarà il prodotto del cerchio massimo ne i due terzi del diametro.

COROLLARIO I.

354. Dunque il cilindro circoscritto alla sfera, la solidità del quale è il prodotto del detto cerchio massimo nel diametro, starà ad essa sfera, come $1 : \frac{2}{3}$, cioè come $3 : 2$, nella qual ragione starà ancora la metà del cilindro all'Emisfero.

COROLLARIO II.

355. Se si supponga iscritto nell'Emisfero BMAND il Cono BAD, il raggio BC della di cui base eguagli l'altezza AC, la di lui solidità essendo per l'Esempio precedente (351.) il prodotto della base nel terzo dell'altezza, ne verrà, che il detto Emisfero starà a tal Cono iscritto, come 2 : 1, cioè sarà duplo di esso, e in conseguenza la sfera sarà quadrupla del medesimo Cono.

COROLLARIO III.

356. Quindi volendosi ridurre a misura il settore sferico CMAN prodotto dalla rivoluzione del settore circolare CMA intorno l'asse AC; al segmento sferico MAN insorto dalla conversione del segmento circolare MAP, che si è veduto, essere $\frac{3p \times \overline{AP}^2 - p \times \overline{AP}^3}{6r}$, aggiungasi il Cono generato dal rotamento del triangolo CMP, che a norma dell'Esempio I. (351.)

(351.) ſi troverà eſſere $\frac{p \times \overline{PM}^2 \times PC}{6r} = \frac{p}{6r} \times (2AP - \overline{AP}^2)$ $\times (1 - AP)$; e la ſomma ſarà $\frac{p \times AP}{3r}$, ovvero (reſtituitole il valore del raggio) $\frac{p \times AP \times \overline{AC}^2}{3r}$, e fatto $r = AC$, ſarà $\frac{p \times AP \times AC}{3}$; cioè il ſettore ſferico in queſtione eguaglia il doppio del cerchio maſſimo moltiplicato nel terzo di AP, ovvero il cerchio maſſimo moltiplicato in due terzi dell'aſciſſa AP; ſicchè il ſettore ſferico, che coincide coll'Emisfero BMAND ſarà eguale al cerchio maſſimo moltiplicato in due terzi del raggio, come ſopra.

E S E M P I O III.

357. Sia da cubarſi la ſferoide Ellittica nata dalla converſione della ſemielliſſe ADB (*Fig. 97.*) intorno all'aſſe traſverſo AB; ſiccome per le Sezioni Coniche l'equazione all'Elliſſe è $\overline{PM}^2 = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{AC}^2} \times (2AC \times AP - \overline{AP}^2)$, la miſura indeterminata di tale ſferoide ſarà $\frac{p \times \overline{CD}^2}{r \times \overline{AC}^2} \times \frac{(3AC \times \overline{AP}^2 - \overline{AP}^3)}{6}$; ſicchè fatto $AP = AC$, $r = CD$, ſi avrà $\frac{1}{3} p \times CD \times AC$, che è la metà della ſferoide in queſtione; e l'intera ſferoide ſarà $\frac{2}{3} p \times CD \times AC$, intendendo al ſolito per p la periferia deſcritta dal ſemiaſſe conjugato CD come raggio; onde la ſolidità dell'emisferoide

ADC farà eguale al cerchio, il di cui raggio è il femiaffe conjugato CD, moltiplicato in due terzi del femiaffe trafverfo AC; e tutta la sferoide eguaglierà il prodotto di detto cerchio ne' due terzi dell'affe trafverfo AB.

COROLLARIO I.

358. Dunque la detta sferoide ellittica ftarà al cilindro circofcritto, come 2 : 3.

COROLLARIO II.

359. Per effere il Cono la terza parte del cilindro, che ha eguali ad effo la bafe, e l'altezza (351.), la detta sferoide ellittica farà doppia del Cono, che ha la medefima altezza AB, e che ha per bafe il cerchio, il di cui raggio è il femiaffe conjugato CD.

COROLLARIO III.

360. Siccome la sfera ifcritta nella sferoide in queftione ha per raggio il di lei femiaffe conjugato CD, la folidità di tale sfera farà $\frac{2}{3}\ p \times \overline{CD}^2$ (353.); onde giacchè i raggi de' cerchj maffimi fono eguali, la detta sferoide ftarà alla sfera defcritta coll'affe minore CD, come $\frac{2}{3}p \times CD \times$

AC:

$AC : \frac{2}{3}\, p \times \overline{CD}^2 :: AC : CD$; cioè come l' aſſe maggiore al minore.

COROLLARIO IV.

361. Similmente ſiccome la sfera circoſcritta alla detta sferoide ha per raggio il ſemiaſſe traſverſo AC, la ſolidità di tale sferoide a detta sfera ſtarà come $\frac{2p \times AC \times \overline{CD}^2}{6r} : \frac{2p \times \overline{AC}^3}{6r}$ $:: \overline{CD}^2 : \overline{AC}^2$, cioè come il quadrato dell'aſſe minore al quadrato del maggiore.

ESEMPIO IV.

362. Sia da cubarſi una Conoide nata dalla rivoluzione dell'Iperbole Apolloniana AM (*Fig.* 98.) intorno all'aſſe AP. L'equazione di tale Iperbole è $\overline{PM}^2 = Q \times AP + Q \times \overline{AP}^2$, in cui l'aſſe traſverſo $AB = 1$, ed il di cui parametro $= Q$; la ſolidità di tal Conoide ſarà $\frac{p \times Q \times \overline{AP}^2}{4r} + \frac{p \times Q \times \overline{AP}^3}{6r}$; ſicchè ſe l'altezza d'eſſa Conoide ſarà eguale all'aſſe traſverſo AB, cioè ſe $AP = AB$, la ſua ſolidità ſarà $\frac{p \times Q \times \overline{AB}^2}{4r} + \frac{p \times Q \times \overline{AB}^3}{6r} = \frac{5p \times Q \times \overline{AB}^2}{12r}$.

Co-

COROLLARIO.

363. Quando l'Iperbole AM foſſe equilatera, ſiccome la ſua equazione ſarebbe $\overline{PM}^2 = AB \times AP + \overline{AP}^2$, per la ſolidità della ſua Conoide ſi avrebbe $\frac{p \times AB \times \overline{AP}^2}{4r} + \frac{p \times \overline{AP}^3}{6r}$.

ESEMPIO V.

364. Siano da cubarſi infiniti ſolidi nati dalla rotazione intorno all'aſſe delle figure compreſe nell'equazione generale $\overline{PM}^n = AP \pm \overline{AP}^2$, ſarà $\overline{PM}^2 = (AP \pm \overline{AP}^2)^{\frac{2}{n}}$; onde la ſomma di tal quantità non ſi potrà, come è viſibile, ottenere, ſe $\frac{2}{n}$ non divenga un numero intero poſitivo, cioè ſe non ſia $n = \frac{2}{m}$, preſo m per un intero; elevata allora la detta quantità alla potenza indicata da tal numero, e moltiplicata la ſomma fattane nella periferia diviſa per la metà del raggio, ne riſulterà la cercata ſolidità; così ſe $\frac{2}{n} = 2$, cioè ſe $n = 1$, ſi avrà $\overline{PM}^2 = \overline{AP}^2 \pm 2\overline{AP}^3 + \overline{AP}^4$; onde la ſolidità cercata ſarà $\frac{p \times \overline{AP}^3}{6r} \pm \frac{p \times \overline{AP}^4}{4r} + \frac{p \times \overline{AP}^5}{10r}$.

E-

ESEMPIO VI.

365. Il folido da cubarfi fia una Conoide Parabolica nata dalla rotazione intorno all' affe d' una Parabola di qualunque ordine AM (*Fig.* 94.) comprefa nell' equazione generale $\overline{PM}^{n} = AP$; farà $\overline{PM}^{2} = \overline{AP}^{\frac{2}{n}}$, onde l' efpreffione generale indefinita di tali Conoidi, fatta al folito la fomma della formula, farà $\frac{np \times \overline{AP}^{\frac{2+n}{n}}}{4r+2nr} = \frac{np \times \overline{PM}^{2} \times AP}{4r+2nr}$; ficche fatto $r = BC$, $AC = AP$, per la folidità dell' intera Conoide fi avrà $\frac{np \times BC \times AC}{4+2n} = \frac{1}{2} p \times BC \times \frac{n}{2+n} \times AC$.

COROLLARIO.

366. Quindi fe $n = 2$, cioè fe la Conoide proverrà dal rotamento intorno all' affe della Parabola Apolloniana, la fua folidità farà eguale al prodotto del cerchio, che ne forma la bafe, nella metà dell' altezza, perchè in tal cafo $\frac{n}{2+n} = \frac{1}{2}$; onde tal Conoide farà fuddupla del cilindro circofcrittole &c.

SCOLIO.

367. Si può d' alcuni de' menzionati folidi aver la cubatura anche nel modo feguente.

N. I.

N. 1. Il triangolo ADI (*Fig.* 99.) rettangolo in I assieme col circoscrittogli rettangolo BI rotinsi intorno all'asse AI; ne nasceranno un Cono, ed un Cilindro. Intorno all'asse AI descrivasi ora la Parabola Apolloniana AMG rivolta al medesimo con la convessità, e dopo d'averle circoscritto il rettangolo EI, si faccia passare per un punto P preso a piacere sulla AI, la CF parallela alla BE, segante il triangolo in N, e la Parabola in M,

Per esservi l'analogia $\overline{ID}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{AI}^2 : \overline{AP}^2 :: IG : PM$, anche il cerchio col raggio DI, ovvero CP, starà al cerchio col raggio PN, come IG, ovvero PF, a PM, e così sempre; onde facendo la somma, il rettangolo EI starà allo spazio parabolico AMGI, come il cilindro fatto dal rettangolo BI al Cono iscrittogli; ma il rettangolo EI è triplo dello spazio AMGI (85.); dunque anche il cilindro è triplo del Cono iscrittogli.

N. 2. Intorno al medesimo asse AI (*Fig.* 100.) descrivansi la Parabola Apolloniana AND concava verso di esso, ed un triangolo qualunque AIG rettangolo in I, poscia il resto costruiscasi come nella figura antecedente. Per essere $\overline{ID}^2 : \overline{PN}^2 :: AI : AP :: IG : PM$, sarà ancora $\overline{CP}^2 : \overline{PN}^2 :: PF : PM$; onde il cerchio col raggio PC starà al cerchio col raggio PN, come la PF alla PM, e così da per tutto; dunque sommando, il rettangolo EI starà all'iscritto triangolo, come il cilindro fatto dal rettangolo BI all'iscrittagli Conoide parabolica AND, e però il cilindro sarà doppio della Conoide parabolica iscrittagli.

N. 3.

N. 3. Il ſemicerchio, o la ſemielliſſe HDI (*Fig.* 101.) aſſieme col rettangolo circoſcritto BI ſi aggirino intorno all' aſſe immobile HI, formando così una sfera, ovvero una sferoide, ed un cilindro. Suppongaſi ora un' intera Parabola Apolloniana HAI coſtrutta in guiſa, che una delle ſue ordinate ſia HI, il di cui aſſe AL prodotto in D dividerà per mezzo la figura HDI; indi deſcritti intorno ad eſſe figure i rettangoli BI, HG, ſi faccia paſſare per un punto qualunque K preſo nella HI la CF parallela all' altro aſſe AL, che ſegherà in N il ſemicerchio, o la ſemielliſſe, e in M la Parabola, dal qual punto M tiriſi l' applicata MP, che ſarà alla parallela HI.

Per eſſer la HI tagliata egualmente in L, e inegualmente in K, ſarà $HK \times KI + \overline{KL}^2 = \overline{HL}^2$; ma abbiamo $\overline{HL}^2 : \overline{KL}^2 \left(\overline{PM}^2\right) :: AL : AP :: KF : FM$; dunque $\overline{HL}^2 : \overline{HL}^2 - \overline{KL}^2 (HK \times KI) :: KF : KF - MF (KM)$; ma per la natura del cerchio, e dell' elliſſe $\overline{HL}^2 : HK \times KI :: \overline{LD}^2 \left(\overline{KC}^2\right) : \overline{KN}^2$; dunque il cerchio col raggio KC ſtarà al cerchio col raggio KN, come KF : KM, e così da per tutto; ſicchè ſommando, il rettangolo HG ſtarà all' area Parabolica HAI, come il cilindro fatto dal rettangolo BI, alla sfera, o sferoide; ma l' area Parabolica è due terzi del circoſcritto rettangolo; dunque anche la sfera, o la sferoide ſarà due terzi del cilindro circoſcritto.

N. 4. *Generalmente* data una figura qualunque ADC (*Fig.* 102. 103.), la di cui applicata PM, ed a cui ſia

circoscritto il rettangolo AD, se col metodo esposto superiormente (74.), o in altra guisa costruiscasi, e conoscasi un' altra figura ABC, a cui pure sia circoscritto il rettangolo EC, ed ogni di cui applicata PN stia come il quadrato di ogni applicata corrispondente PM, si avrà sempre la cubatura del solido generato dalla rivoluzione della figura ADC intorno all' asse AC, ogni volta che dell' area ABC sia ottenibile la quadratura; imperciocchè sarà $\overline{CD}^2 \left(\overline{PH}^2\right) : \overline{PM}^2 ::$ CB (PG) : PN; onde come il rettangolo EC all' area iscritta ABC, così il cilindro AD al solido iscritto ADC; il che costituisce un *nuovo metodo per le cubature*, da estendersi ancora ad altre curiose speculazioni. Ex. gr. se si volesse la somma di tutte le potenze $\overline{PM}^n$ competenti alle applicate paraboliche comprese nell' equazione $\overline{PM}^n = AP$, in cui n è un numero intero; questa si troverebbe essere generalmente $\frac{1}{2}\overline{PM}^n \times AP$; cioè nelle Parabole di qualunque ordine in questione la somma delle potenze di qualsivoglia numero d' applicate consecutive eguaglia la potenza della massima applicata condotta nella metà dell' ascissa, o sia del loro numero.

N. 5. Per dar poi un Esempio di questo metodo, che oltre agli altri metodi precedenti favorisce mirabilmente gl' Indivisibili Cavalleriani, immaginiamoci, che una figura Parabolica ADC (*Fig.* 103.) giri intorno all' asse esteriore AP;

sic-

ſiccome l'equazione generale ad eſſa è $PM = \overline{AP}^{n}$, ſi avrà $\overline{PM}^{2} = \overline{AP}^{2n}$; l'equazione dunque alla curva ANB, che può chiamarſi *cubatrice*, ſarà $PN = \overline{AP}^{2n}$, e l'area APN ſarà $\frac{\overline{AP}^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} AP \times PN$; ſicchè ſe $n = 2$, tal'area ſarà $\frac{1}{5} AP \times PN$; e però il ſolido nato dalla rotazione della Parabola Apolloniana intorno all'aſſe eſteriore ſarà una quinta parte del cilindro circoſcritto, ovvero ſarà eguale al cerchio, che ha per raggio PM, qual cerchio ſia moltiplicato in un quinto dell'altezza AP. &c.

CAPITOLO OTTAVO.

Dello ſpianamento delle ſuperficie de' corpi.

§§*§*§*§*§*

PROPOSIZIONE XXIV.

368. M*Iſurare la ſuperficie del ſolido nato dalla rotazione della figura ABI* (*Fig.* 55.) *intorno all' aſſe AI*.

Suppongaſi, che il ſolido nato dalla rivoluzione della figura ABI intorno all' aſſe AI ſia tagliato normalmente all' aſſe da innumerabili piani infinitamente proſſimi, e paralleli PM, *pm*, reſterà tutto il ſolido diviſo in tanti Coni retti troncati d' un' altezza inaſſegnabile P*p*, giacchè l' archetto M*m*, che forma il loro lato, non differiſce ſenſibilmente da una retta; ma per la Geometria la ſuperficie d' un Cono retto troncato è la metà del rettangolo ſotto il ſuo lato, e ſotto la ſomma delle circonferenze, formanti l' orlo delle due baſi oppoſte, e parallele; dunque non differendo in queſto caſo tra loro le dette circonferenze, la ſuperficie del Cono infiniteſimo in queſtione (fatta la relazione del raggio alla periferia come $r:p$) ſarà $\frac{p}{r} \times PM \times$

M*m*

$Mm = \frac{p \times PM \times MT}{r \times PT}$ (321. *N.* 5.); ficchè foftituiti i valori, e trovata la fomma di quefta quantità variabile, fi verrà ne' cafi fpeciali in cognizione della ricercata fuperficie.

Corollario I.

369. Dunque fe fi farà PT:TM::PM:PQ, e così fempre, ne nafcerà l'area curvilinea AQP, che ftarà alla fuperficie prodotta dalla rotazione della figura AMP intorno all' affe AP, come il raggio alla periferia; ed in fatti per l'analogia PT:TM::P*p*:M*m*::PM:PQ, fi avrà $Pp \times PQ = PM \times Mm$, come ancora $\frac{p}{r} \times (Pp \times PQ) = \frac{p}{r} \times PM \times Mm$; onde $Pp \times PQ$, ovvero PQ (256.) ftarà all'anello formato dalla rotazione della PM affieme con la M*m* intorno all' affe AP, come il raggio alla periferia, cioè in una ragion coftante, e in confeguenza in tal rapporto ftarà ancora tutta l'area AQP a tutta la detta fuperficie.

Corollario II.

370. Condotta la MS normale in M alla curva AM, per effere PT:TM::PM:MS::PM:PQ, vedefi, che le applicate PQ della figura AQP fono fempre eguali alle normali corrifpondenti MS della curva AM; onde facile rendefi la fua coftruzione.

Co-

COROLLARIO III.

371. L'equazione dunque alla curva AQP sarà generalmente $PQ = MS = \frac{PM \times MT}{PT}$, il che concorda con la formula data quì sopra; onde sostituiti in termini di AP gli equivalenti, si avrà l'equazione ne' casi speciali alla detta curva, quale, se sarà quadrabile, sarà altresì spianabile la superficie del solido nato dalla figura AMP rotata intorno all' asse AP, facendo, come il semiquadrato del raggio al suo cerchio, così l'area AQP alla superficie curva in questione.

COROLLARIO IV.

372. Essendo l'area AQP eguale al prodotto di tutte l'applicate PM ne' respettivi archetti M*m*, se queste applicate suppónganli erette normalmente sull' arco AM, ne nascerà un'ungula, che eguaglierà la dett' area; onde se quest' area sarà quadrabile, lo sarà ancora la dett' ungula.

COROLLARIO V.

373. Viceversa nota la curva superficie d' un solido risultante dalla rivoluzione di qualunque figura AMP intorno all' asse AP, si potrà avere tanto la quadratura dell' ungula nata nel modo antedetto, quanto dello spazio corrispondente AQP, quali due aree eguaglieranno il semiquadrato di quel raggio, che forma un cerchio eguale alla nominata cur-

va

va superficie; imperciocchè stando questa allo spazio corrispondente AQP, come la periferia al raggio, ne verrà, che tanto la dett'ungula, quanto il nominato spazio, che si eguagliano, eguaglieranno ancora il semiquadrato del raggio di quel cerchio, a cui è eguale la superficie nata dalla rivoluzione della figura AMP intorno all'asse AP.

Corollario VI.

374. Che se sarà nota la quadratura, o dell'ungula sopradetta, o dello spazio AQP, col fare un quadrato doppio di tal area, si avrà nel suo lato, o nella sua radice il raggio di quel cerchio, che eguaglia la superficie prodotta dalla detta rotazione.

Corollario VII.

375. Se col metodo superiormente esposto (*166.*) costruiscasi la figura AVDK eguale nell'aree AVNR all'aree corrispondenti AQP della già descritta figura AOI, le di lei applicate RN eguaglieranno le tangenti MT; imperciocchè PM:PT::MS:MT::PQ:RN; ma PQ = MS (370.), dunque MT = RN; onde facile è ancora della figura ADK la costruzione, come pure n'è facile l'equazione generale RN = MT, esprimendo poi ne'casi speciali il valore della tangente MT in termini di PM = AR.

Co-

COROLLARIO VIII.

376. Se si descriverà la curva AG (*Fig.* 104.), la di cui sunnormale PZ eguagli l'applicata PQ$=$MS(370.), l'area AQP sarà eguale alla metà del quadrato della PG (156.); onde i semiquadrati dell'applicate di questa curva AG eguaglieranno l'ungule corrispondenti, che nascono dall' alzare l'applicate della curva AMB normalmente agli archi congrui (372.), e l'applicate PG della detta curva AG saranno raggi di que' cerchj, che eguagliano la superficie nata dalla rivoluzione della figura corrispondente AMP, o dell' arco AM intorno all' asse AP (374.).

COROLLARIO IX.

377. In oltre costrutta nella maniera detta poco anzi (375.) sull'asse esteriore AK una figura AVDK eguale nell' aree AVNR all'aree corrispondenti AQP della figura AOI, le di cui semiordinate RN eguagliano le tangenti MT, descrivasi una curva AX, le di cui sunnormali WR eguaglino tali applicate RN, o tali tangenti MT, che le corrispondono, sarà $\frac{1}{2}\overline{RX}^2$ eguale all'area AVNR; ma quest' area eguaglia l'area AQP, a cui è eguale $\frac{1}{2}\overline{PG}^2$ per il corollario antecedente; dunque $\frac{1}{2}\overline{RX}^2=\frac{1}{2}\overline{PG}^2$, e in conseguenza RX $=$PG; onde anche $\frac{1}{2}\overline{RX}^2$ eguaglierà l'ungula insorta dall' in-

innalzamento a perpendicolo dell'applicate PM ſull'arco AM, e il cerchio deſcritto dal raggio RX ſarà eguale anch'eſſo alla ſuperficie nata dal rotamento della figura AMP intorno all' aſſe AP.

COROLLARIO X.

378. Data dunque qualunque curva AM, ſe ſi potrà conoſcere un'altra curva AG, le di cui ſunnormali PZ eguaglino le normali MS; ovvero ſe ſi potrà conoſcere un' altra curva AX, le di cui ſunnormali WR eguaglino le tangenti MT, ſi otterrà ſempre la miſura tanto dell' ungula nata dall'alzar normalmente l'applicate PM ſull'arco AM, quanto ancora della ſuperficie del ſolido generato dal rotamento della figura AMP intorno all' aſſe AP. Dal che deduceſi, che la ſoluzione di queſto Problema può appartenere anche a quel metodo, che chiamaſi *Metodo inverſo delle Tangenti.*

COROLLARIO XI.

379. Dunque ſe vi ſaranno due curve, le tangenti d'una delle quali eguaglino le normali dell'altra, ſi troverà facilmente il rapporto tra le ſuperficie nate dalla rivoluzione de' loro archi intorno all'aſſe.

COROLLARIO XII.

380. Reſtando ſempre ſiſſo il medeſimo arco AM, non ſi conſideri più riguardo all'aſſe interiore AP, ma all'eſte-

riore AR; la ſottangente ſarà in tal caſo la RH intercetta dall'applicata eſteriore MR, e dall'incontro in H della tangente MT coll'aſſe AR; onde facendo come ſopra l'analogia RH:HM::MR:RN, e così ſempre, ne naſcerà l'area AVNR, che ſi dimoſtrerà coll'iſteſſo raziocinio ſtare alla ſuperficie nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'aſſe AR, come il raggio alla periferia circolare.

Corollario XIII.

381. Quindi l'equazione alla curva VN ſarà $RN = \frac{HM \times MR}{RH}$; ma in ogni curva la ſottangente ſtà all'aſciſſa da una parte, come l'aſciſſa alla ſottangente dall'altra (80.); dunque ſarà $RH = \frac{AP \times PM}{PT}$, come pure $HM = \frac{TM \times AP}{PT}$; ſicchè la prima equazione, ſoſtituendo gli equivalenti, ſi cangerà in queſt'altra $RN = \frac{AP \times TM}{PM}$; ſurrogando dunque i valori delle AP, TM in termini di PM, ovvero di AR, ſi otterrà l'equazione alla detta curva VN ne' caſi ſpeciali; qual curva, ſe ſarà quadrabile, darà nel lato, o ſia nella radice di un quadrato eguale alla ſua area AVNR il raggio del cerchio eguale alla ſuperficie nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'aſſe AR.

Corollario XIV.

382. Quando ſi voglia ridurre a miſura la ſuperficie, che naſce dalla converſione dell'arco BM intorno all'aſſe BI, quantunque il vertice della curva ſia in A, condotta la tan-

tangente TM a ferire in r la BI prolungata, facciasi rE : rM :: ME : EF, e così sempre, ne nascerà l'area BFCI, dalla di cui quadratura dipende la cognizione della proposta superficie, e la di cui equazione può trovarsi così. Per esser simili i triangoli rME, MTP, si avrà rE : rM :: PM : MT; onde PM : MT :: ME (AI—AP) : EF $= \frac{(AI - AP) \times MT}{PM}$; sostituiti dunque in termini di PM $=$ BI—BE gli equivalenti, e fattane, se è possibile, la somma, si otterrà il fine bramato.

ESEMPIO I.

383. *N.* 1. Sia il Cono ABD (*Fig.* 95.) nato dalla rotazione del triangolo rettangolo ABC intorno l'asse AC, sarà PM $= \frac{AP \times BC}{AC}$, onde la formula generale, sostituiti i valori, diverrà $\frac{p \times BC \times AM}{r \times AC}$; ma AM $= \frac{AB \times AP}{AC}$; dunque $\frac{p \times BC \times AM}{r \times AC} = \frac{p \times BC \times AB \times AP}{r \times \overline{AC}^2}$, la di cui somma è

$\frac{p \times BC \times AB \times \overline{AP}^2}{2r \times \overline{AC}^2}$; fatto dunque BC $= r$, AP $=$ AC, per la superficie del Cono intero si avrà $\frac{1}{2} p \times AB$; cioè la superficie del Cono intero eguaglia il prodotto fatto dalla semiperiferia della base nel lato AB, appunto come deve essere.

N. 2. Suppongasi nuovamente un Cono generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo ABC (*Fig.* 108.) intorno all'asse AC, sarà per le cose dette (369.) PQ $=$ $\frac{AB \times PM}{AC}$; ma la ragione di AC ad AB è costante; dunque

 la

la PQ ſarà ſempre proporzionale alla PM, come ancora alla AP; e però la figura ADC, che ha le PQ per applicate, ſarà un triangolo anch'eſſa; in conſeguenza la miſura indeterminata della ſuperficie conica ſarà $\frac{p \times AP \times AB \times PM}{2r \times AC}$, e fatto $AP = AC$, $PM = BC$, e preſo per raggio BC, cioè fatto $BC = r$, la ſuperficie conica nata dalla rotazione dell' intero triangolo ABC intorno all'aſſe AC ſarà $\frac{1}{2} p \times AB$, come ſopra.

S c o l i o.

384. La miſura della ſuperficie conica ſi può avere con gran facilità anche in queſta maniera. Eſſendo il contorno BPD (*Fig.* 105.) della baſe del Cono ABD una periferia circolare, ſuppongaſi diviſa in particelle infiniteſime tutte eguali fra loro, una delle quali ſia Pp, e a' punti P, p tirinſi dal vertice A le AP, Ap, che ſaranno linee rette, e formeranno il triangolo infiniteſimo APp, la di cui miſura è $\frac{1}{2} Pp \times AP$; ma tutta la ſuperficie conica può eſſer diviſa in tanti triangoletti APp eguali tutti fra loro; dunque la miſura della ſuperficie del Cono ſi avrà moltiplicando la ſemiperiferia della baſe nel lato di eſſo.

E s e m p i o II.

385. *N.* I. Sia AMB (*Fig.* 104.) un arco di cerchio, il di cui centro S; Per aver eſſo la normale coſtante, che è il

il raggio MS, la figura AQP diverrà un rettangolo, le di cui applicate PQ saranno eguali al raggio MS, ovvero AS (370.); onde l' ungula, che nasce da' seni retti PM alzati normalmente sull' arco circolare AM, sarà eguale al rettangolo del raggio nel seno verso (371.), cioè a SAP. Questo rettangolo poi stà alla superficie sferica generata dall' arco AM, come il raggio AS alla sua circonferenza, ovvero (moltiplicato tanto il raggio AS, che la sua circonferenza per AP) come il medesimo rettangolo SAP, alla superficie cilindrica nata dalla AP condotta nella circonferenza, il di cui raggio AS; il che si uniforma a quanto ha dimostrato Archimede, cioè che le porzioni, o zone di superficie sferica eguagliano le porzioni, o zone egualmente alte d' una superficie cilindrica circoscritta.

N. 2. Sia nuovamente AMB un arco circolare, il di cui centro S; Per essere la normale MS l' istessa cosa che il raggio, la figura AGP sarà una Parabola Apolloniana (378.), il di cui parametro 2MS; onde la PG, che è il raggio di quel cerchio, che eguaglia la superficie sferica insorta dal rotamento dell' arco AM intorno l' asse AP, sarà media proporzionale tra 2MS, e AP; ma tal media proporzionale è ancora nel cerchio la corda AM; dunque le porzioni di superficie emisferica sono eguali a' cerchj, che hanno per raggi le corde corrispondenti, come appunto dimostrò Archimede.

Corollario I.

386. Dunque tanto per il *N.* 1., che per il 2. di quest' Esempio, la superficie totale d' una sfera sarà quadrupla del cerchio massimo d' essa sfera. Co-

COROLLARIO II.

387. Nella medesima sfera le superficie generate dalla rivoluzione degli archi stanno come l'altezze degli archi medesimi; e in due sfere ineguali le superficie generate dalla rivoluzione degli archi stanno in ragion composta delle altezze degli archi medesimi, e de' diametri, ovvero de' raggi; sicchè le superficie sferiche in qualunque luogo di due sfere eguali, o ineguali possono dividersi in qualunque ragione.

COROLLARIO III.

388. Giacchè per il *N.* 2. di questo Esempio, il cerchio, il di cui raggio è la corda AM, eguaglia la superficie sferica nata dalla rotazione dell'arco AM intorno all'asse AP, la metà del quadrato di tal corda dovrà eguagliare l'ungula risultante da' seni retti PM innalzati normalmente sull'arco AM (373.); e in fatti la metà di tal quadrato eguaglia il rettangolo SAP, cioè il rettangolo del raggio nel seno verso, come appunto si è dimostrato nel *N.* 1. di questo Esempio.

ESEMPIO III.

389. *N.* 1. Sia AM (*Fig.* 106.) una Trattoria, il di cui asintoto IF; siccome la sua tangente è costante, la quadratura dell'ungula nata dal porre a perpendicolo l'applicate PM

PM ſull' arco indefinito MA ſarà eguale al rettangolo della tangente MT nell'applicata PM (375.); onde tal rettangolo ſtarà alla ſuperficie inſorta dalla rotazione di tal curva intorno all'aſintoto IF, come il raggio alla periferia; fiſſato dunque PM per raggio, e moltiplicando il terzo, e quarto termine per MT, il rettangolo TMP ſtarà alla detta ſuperficie, come il medeſimo rettangolo TMP alla ſuperficie di un cilindro riſultante dalla periferia del raggio PM condotta nell'altezza della tangente MT; ma tal ſuperficie cilindrica è per la Geometria eguale al cerchio che ha per raggio $\sqrt{(2MT \times PM)}$; dunque la ſuperficie in queſtione della Trattoria ſarà anch'eſſa eguale al cerchio, che ha per raggio $\sqrt{(2MT \times PM)}$, cioè la media proporzionale tra il doppio della tangente, e l'applicata.

N. 2. Sia nuovamente AM una Trattoria intorno al ſuo aſintoto IF; ſulla ſua baſe IB parallela all'applicata PM deſcritta una Parabola Apolloniana IX, la di cui ſunnormale WR eguagli la tangente MT, la ſua applicata RX ſarà il raggio di quel cerchio, ch'eguaglia la ſuperficie nata dalla rotazione dell'indefinito arco MA intorno all'aſintoto PF (377.), ma queſta RX è media proporzionale tra la IR, e il doppio della WR per la natura della Parabola; dunque la detta ſuperficie nata dalla rotazione dell'indefinito arco MA della Trattoria intorno l'aſintoto PF ſarà eguale a quel cerchio, il di cui raggio è medio proporzionale tra l'applicata PM, e il doppio della tangente MT, cioè $\sqrt{(2MT \times PM)}$.

Co-

COROLLARIO I.

390. Quando PM divenga eguale a MT, cioè quando la massima applicata BI sia il termine della figura, allora della Parabola IX l'applicata $BD = \sqrt{2\overline{MT}^2} = \sqrt{2\overline{IB}^2}$ sarà il raggio del cerchio eguale alla superficie del solido generato dalla figura indefinita BMAFI rotata intorno l'asintoto IF; onde la total superficie di questo solido eguaglia quell'area circolare, il di cui raggio è la diagonale del quadrato della IB massima applicata, o della tangente MT.

COROLLARIO II.

391. La superficie generata dall'arco indefinito MA nel suo rivolgimento intorno l'asintoto PF starà a quella prodotta in simil guisa da un'altr'arco indefinito BMA, come $\sqrt{PM} : \sqrt{IB}$, cioè in ragion sudduplicata delle respettive applicate PM, IB.

COROLLARIO III.

392. Siccome l'ungula indefinita proveniente dal porre a perpendicolo sull'arco indefinito MA tutte l'applicate PM, andando verso A, eguaglia il rettangolo $MT \times PM$, tali ungule staranno tra loro, come le respettive applicate.

Co-

COROLLARIO IV.

393. Preso nell'afintoto IF qualfivoglia punto E, fe col raggio $ES = MT$ defcrivafi il quadrante EGS, indi prolungata l'applicata MP in N, tirifi la corda EN, la fuperficie sferica nata dalla rotazione della periferia EN intorno all'affe EP ftarà a quella prodotta dall'arco indefinito MA intorno all'afintoto PF, come EP : PM; dimodochè fe $EP = PM$, anche la prima fuperficie sferica eguaglierà la feconda fuperficie del folido della Trattoria. Che fe il raggio SE del quadrante EGS fia prefo ad arbitrio, la fuperficie sferica ftarà a quella del corrifpondente folido della Trattoria, come $2ES \times EP : 2MT \times PM$, cioè in ragion compofta di quella del raggio ES alla tangente MT, e di quella del feno verfo EP all'applicata PM.

ESEMPIO IV.

394. L'equazione alla curva AM (*Fig.* 104.) fia generalmente $AP = \overline{PM}^n$, cioè all'infinite Parabole; la fottangente PT farà nAP, onde effendo $\frac{\overline{MT}^2}{\overline{PT}^2} = 1 + \frac{\overline{PM}^2}{\overline{PT}^2} = 1 + \frac{1}{n^2}\overline{AP}^{\frac{2}{n}-2}$, l'equazione generale in tal cafo alla curva AQ farà $\overline{PQ}^2 = \frac{\overline{PM}^2 \times \overline{MT}^2}{\overline{PT}^2} = \overline{AP}^{\frac{2}{n}} + \frac{1}{n^2}\overline{AP}^{\frac{4}{n}-2}$; quando dunque

ſi potrà ne' caſi ſpeciali ottenere la quadratura della curva AQP indicata da tal equazione, tal quadratura moltiplicata in $\frac{p}{r}$ darà la miſura della ſuperficie richieſta della Conoide Parabolica.

Corollario I.

395. Quando ſia $n = 2$, allora ſi avrà $\overline{PQ}^2 = AP + \frac{1}{4} = \frac{4AP+1}{4}$; qual equazione è ad un'altra Parabola Apolloniana troncata AFDI (*Fig.* 107.) rivolgente la cavità all' aſſe AP; imperciocchè fatta $AE = \frac{1}{4}$, e ſuppoſto, che il parametro di detta Parabola intera EFDI ſia 1, ſi avrà $\overline{PQ}^2 = AP + \frac{1}{4} = \frac{4AP+1}{4}$; onde l' area della Conoide Parabolica nata dalla rotazione dell' arco AM intorno all' aſſe AP ſarà $\frac{(4p \times AP + p) \times \sqrt{(4AP+1)} - p}{12r}$; ovvero fatto il lato retto, o parametro $1 = L$, e cangiato in termini di PM il valore di AP, la ſuperficie di detta Conoide ſarà $\frac{(4p \times \overline{PM}^2 + p \times L^2) \times \sqrt{(4\overline{PM}^2 + L^2)} - p \times L^3}{12r \times L}$; e in conſeguenza l' ungula, che proviene dal porre l' applicate PM a perpendicolo ſull' arco AM, ſarà quadrabile.

Co-

COROLLARIO II.

396. Se fosse $n = 1$, l'equazione farebbe $PQ = PM \times \sqrt{2}$, la di cui somma è $\frac{1}{2}\overline{PM}^2 \times \sqrt{2}$; onde la superficie, che sarebbe di un triangolo rettangolo equicrure ACB (*Fig. 86.*) rotato intorno l'asse AC, fatt o $PM = BC = r$, si troverà, essere $\frac{1}{2} p \times BC \times \sqrt{2} = \frac{1}{2} p \times \sqrt{2\overline{BC}^2}$, cioè il prodotto della semiperiferia della base nel lato AB, come sopra (383. 384.).

SCOLIO I.

397. Finchè il valore d'una variabile viene espresso in soli termini dell'altra, gli esposti metodi possono facilmente adoperarsi; ma quando i termini d'amendue le variabili sono mescolati insieme, e che si vogliano ritenere, e distinguere le quantità infinitesime dell'una da quelle dell'altra, si può ricorrere ad una speciale caratteristica; ed ecco che ci andiamo ad immergere nel famoso calcolo Newtoniano delle flussioni, e de' fluenti, o nel calcolo differenziale, e integrale Leibniziano, che coincide col Newtoniano, la caratteristica del qual calcolo Leibniziano, che porta seco il dx, o il dy &c. è più generalmente ricevuta.

Quindi raccogliesi in primo luogo, che le due regole fondamentali di questo calcolo si sono dimostrate direttamente con la sola Geometria senza ricorrere alli spazj descritti, alle velocità, ed a' tempi, il che parmi, che fosse finora tra

 le

le cose desiderate; resta dunque l' importantissima scoperta di tal calcolo confermata, ed ogni suo contegno messo al coperto da qualunque sospetto, che potesse cadervi, giacchè essendo i principj di questo calcolo più metafisicamente, che geometricamente dimostrati, non soddisfanno pienamente chi ne vuol essere in possesso, se non dopo d' aver osservato, che la di loro applicazione allo scioglimento de' problemi corrisponde esattamente alle dimostrazioni già fatte con la pura Geometria; anzi non mancano persone, che quantunque intendenti d' esso calcolo, e che ne abbiano sempre osservato esatto il riscontro, non possono, come il dottissimo Abate de Gua, liberarsi da un perpetuo scrupolo in occasione di doverli prestare onninamente l' assenso.

In secondo luogo comprendesi manifestamente, che il suddetto calcolo non è altro nel suo fondo, che la dottrina degl' Indivisibili tanto promossa dal P. Cavalerio, dal Torricelli, e dal de Angelis, la di cui origine per altro debbesi all' immortale Galileo, che ne fe comparire i primi vestigj nel Dialogo I. dove parla d' un cilindro scavato per mezzo d' un' emisfero, e nel Dialogo III. del moto uniformemente accelerato, Prop. I. Per tal ragione io ho chiamato il metodo da me geometricamente esposto, *metodo degl' Indivisibili*, lasciando agli altri la libertà di nominarlo a lor modo, quantunque la giustizia vorrebbe, che si dovesse chiamare col nome datoli da' primi Inventori. In fatti il Des-Cartes trovato all' applicata (ch' è l' indivisibile Italiano) un equivalente in termini dell' ascissa, se ne servì molto felicemente per assegnare l' equazioni alle curve; il Wallis formò sull' innanzi degl' indivisibili la sua Aritmetica degl' Infini-

niti; e il Newton lavorando full' orme dell' Ugenio, dello Slufio, e del Barrowio il fuo celebre calcolo, li riduffe non penfandovi alla perfezione, benche li difprezzaffe nell'atto iftelfo, che inavvertentemente fe ne ferviva per fabbricarvi fopra la fua gloria.

SCOLIO II.

398. Giacchè fi è parlato tranfitoriamente del calcolo infinitefimale, mi fia permeffo di fare una rifleffione fopra la comune dimoftrazione d' una delle fue operazioni principali. Dall'effere il differenziale di $xy = xdy + ydx$, ricavafi da M. de l'Hofpital, dal Wolfio, e da altri Analifti, che il differenziale di $\frac{x}{y}$ fia $\frac{ydx - xdy}{yy}$; ma il differenziale di xy può, come effi Autori confeffano, effere ancora $xdy - ydx$ quando al crefcere d'una coordinata x, l' altra y và fcemando; dunque in tal fuppofto il differenziale di $\frac{x}{y}$ deve effere $\frac{ydx + xdy}{yy}$, ed eccone la dimoftrazione. Sia $\frac{x}{y} = v$; farà $x = yv$; $dx = ydv - vdy$ nel cafo fuddetto che una coordinata v decrefca all' aumentarfi dell' altra y; quindi $dx + vdy = ydv$; $dx + \frac{xdy}{y} = ydv$; $\frac{dx}{y} + \frac{xdy}{yy} = dv$; $\frac{ydx + xdy}{yy} = dv$. Se fi voleffe, che la coordinata y diminuiffe, mentre crefce l' altra v, allora il differenziale di $\frac{x}{y}$ fi troverebbe effere $\frac{xdy - ydx}{yy} = dv$; ma amendue quefte formule fono erronee, il che può conofcerfi dal metterle in ufo, anche come fuperiormente fi diffe (292.), ed è vera foltanto la prima, cioè $\frac{ydx - xdy}{yy}$; dunque la dimoftrazione generale fatta per provare, che il dif-

fe-

ferenziale di $\frac{x}{y}$ sia $\frac{ydx - xdy}{yy}$, non è esatta, perchè potendosi col di lei metodo trovare tre casi, uno vero, e due falsi, conduce tanto alla verità, che all' errore,

Se replicassero, che dall' aver fatto $x = yv$, ne viene, che al crescere della coordinata y deve crescere l' altra v, risponderò, che erano in obbligo di provarlo; ma io dimostrerò, che può essere anche il contrario; imperciocchè sia l' equazione $y^m = x$; fatto al solito $\frac{x}{y} = v$, e sostituiti gli equivalenti, sarà $\frac{x}{x^{\frac{1}{m}}} = v$, ovvero $x^{1-\frac{1}{m}} = v$; sicchè quando la quantità $1 - \frac{1}{m}$ sia negativa, l' equazione alla nuova curva, la di cui applicata sia v, sarà sempre all' Iperboli tra gli asintoti, e perciò al crescere delle coordinate x, y dovrà decrescere l' applicata v; in tal caso il differenziale di vy, che eguaglia quello di $vx^{\frac{1}{m}}$, sarà di comun consenso $ydv - vdy$, quando v rappresenti l' ascissa, y l' applicata; ovvero $vdy - ydv$, quando y rappresenti l' ascissa, v l' applicata; onde differenziando l' equazione $x = vy$, il differenziale non solo potrà essere $dx = vdy + ydv$, ma ancora $dx = ydv - vdy$, ovvero $dx = vdy - ydv$; dal che confermasi, che la detta dimostrazione può condurre tanto alla verità, che all' errore; e che in conseguenza hanno avuto qualche ragione alcuni Geometri a vivere inquieti sull' operazioni primarie del detto calcolo, per essere tanto astrattamente dimostrate.

CA-

CAPITOLO NONO.

Della misura delle superficie rispetto alle solidità, che comprendono.

* * * * * *
* * * * *

PROPOSIZIONE XXV.

399. *Quanto più si viene a scemare un corpo di mole, più cresce la sua superficie rispetto alla mole rimanente.*

Non si può fare una sezione di qualunque corpo, senza che nascano due nuove superficie, appartenente ciascuna al suo pezzo diviso dall' altro; questi pezzi adunque prima d' esser disuniti venivano coperti da minor superficie, cioè la loro solidità aveva meno parti scoperte; ma queste parti più si scuoprono, più che si replicano le sezioni, vale a dire, più superficie nascono, più che si diminuisce il corpo; dunque è manifesta la Proposizione.

COROLLARIO.

400. Quanto dunque più piccolo è un corpo, tanto è maggiore la sua superficie riguardo alla solidità, che contiene.

Sco-

SCOLIO.

401. Un Cubo tagliato per mezzo con un piano parallelo alle sue facce perde un terzo di superficie, e un mezzo di solidità, poichè la sua superficie dopo il taglio sta a quella di prima, come 2 : 3; ma la sua solidità nella medesima circostanza è come 1 : 2. Parimente se il Cubo medesimo sarà nell' istesso modo tagliato da un piano nella terza parte della sua altezza, la superficie della parte maggiore sarà all' intera, come 7 : 9; e la solidità del medesimo pezzo riguardo alla totale, come 3 : 2. Taglisi una sfera per mezzo; la superficie della metà recisa relativamente a quella di tutta la sfera solida è come 3 : 4; ma la solidità nel medesimo caso è come 1 : 2. Dividasi per mezzo un Cubo con un piano, che passi perpendicolarmente per il diametro d' una delle sue facce, incommensurabile, e però inesprimibile in numeri esatti è il rapporto, che ha il piano nato dalla detta sezione con una delle sue facce, ma vedesi manifestamente, che la solidità divisa rispetto all' intera, è come 1 : 2; ma la superficie nata dalla detta sezione è sempre maggiore della metà del Cubo intero.

PROPOSIZIONE XXVI.

402. *Le superficie rispetto alle comprese solidità in due corpi di qualunque specie stanno in ragion composta della diretta di lor medesime, e della reciproca delle solidità, che comprendono.*

Siano i corpi A, B, e la superficie del corpo A sia s; la solidità, o la massa compresavi sia m; la superficie del

del corpo B ſia S, e la maſſa, o ſolidità contenutavi ſia M; le ſuperficie, e le ſolidità ſi concepiſcono come quantità omogenee, altrimenti non ſe ne potrebbe avere il rapporto; in quella guiſa, che quantità omogenee ſi conſiderano a tal fine da' Geometri lo ſpazio, la velocità, e il tempo. Per aver poi il rapporto di due ragioni, ſe ne debbono confrontare gli eſponenti, e queſti ſi hanno col dividere il primo termine di ciaſcuna ragione per il ſecondo; i due eſponenti adunque delle ragioni, che quì ſi cercano, ſono $\frac{s}{m}$, $\frac{S}{M}$; onde la ſuperficie del corpo A riſpetto alla compreſavi ſolidità, alla ſuperficie del corpo B relativamente alla ſolidità contenutavi ſtarà nel rapporto di $\frac{s}{m} : \frac{S}{M}$; ma riducendo le frazioni al medeſimo denominatore, ſi ottiene $\frac{s}{m} : \frac{S}{M} :: \frac{sM}{Mm} : \frac{Sm}{Mm} :: sM : Sm$; reſta dunque dimoſtrata la Propoſizione.

COROLLARIO I.

403. Se le ſolidità ſaranno eguali, ſi metteranno in conto le ſole ſuperficie preſe direttamente; così ſe di due ſfere eguali riducaſene una a cilindro, non ſi conſidera altro, tralaſciata la ſolidità, che il rapporto, che ha la ſuperficie del cilindro a quella della ſfera.

COROLLARIO II.

404. Ma ſe reſtando eguali le ſuperficie, varieranno le ſolidità, ſi computeranno inverſamente le ſole ſolidità; così in queſto caſo la ſuperficie del corpo minore ſtarà a quella

 del

del maggiore, rispettivamente alle solidità, che ricoprono; come la solidità del maggiore a quella del minore.

Corollario III.

405. Se poi le superficie staranno in ragion diretta delle solidità, verrà il caso d'eguaglianza, il che è manifesto; imperciocchè il corpo A abbia 1. di superficie, e 4. di solidità, ed il corpo B abbia 4. di superficie, e 16. di solidità, la superficie del corpo A rispetto alla solidità, che abbraccia, sta alla superficie del corpo B riguardo alla solidità, che ricopre, come *16:16*; o come 1:1; cioè in proporzione d'eguaglianza; nè ciò altera l'enunciazione, che quanto più un corpo perde di solidità, tanto più acquista relativamente ad essa di superficie, il che non ha bisogno di prova.

Scolio I.

406. Se imprendasi il calcolo ne' cubi, e suppongasene uno doppio d'un'altro, la superficie del minore a quella del maggiore nella data ipotesi troverassi stare, come 2:1. Se l'uno è 27. volte maggiore dell'altro, la superficie del minore sta col detto riguardo a quella del maggiore, come 3:1. Se l'uno è 64. volte maggiore dell'altro, quella del minore a quella del maggiore starà rispetto alla solidità, come 4:1. Se l'uno è 125. volte maggiore dell'altro, la superficie del minore starà sull'istessa idea a quella del maggiore, come 5:1; e così in seguito. Ciò può applicarsi non solamente alle sfere, quanto ancora a'corpi simili, donde ricavasi il seguente *Teo-*

Teorema I. Se saranno due corpi simili, che stiano in qualunque ragione tra loro, la superficie del minore riguardo alla compresa solidità starà a quella del maggiore rispetto alla solidità, che contiene, in ragione inversa delle loro radici, se sono cubi; de' loro diametri, se sono sfere; e generalmente de' loro lati omologhi, se sono corpi simili.

407. Invece poi di considerare due corpi simili, si considerino ora più corpi simili eguali fra loro, ed eguali parimente nella loro somma ad un' altro simile, e seguasi a fare il calcolo addosso a' cubi. Se questi si suppongano in numero di otto eguali tutti insieme nella solidità ad un solo cubo, si troverà, stare tutta la somma della loro superficie a quella del solo cubo, come 2: 1; Se i cubi eguali saranno 27., la somma delle loro superficie starà a quella d' un cubo, che in se tutti li comprenda, come 3: 1; e così in seguito. Da quest' ipotesi adunque ricavasi la misura istessa del Teorema antecedente, il che forma il seguente

Teorema II. Se più corpi simili, ed eguali presi tutti insieme saranno eguali ad un corpo simile ad uno di loro, la superficie di tutti questi sommata, e paragonata con la superficie di questo solo, starà in ragion reciproca delle loro radici, se sono cubi; de' loro diametri, o semidiametri, se sono sfere, e generalmente de' loro lati omologhi, se sono corpi simili.

Nelle figure poi irregolari, è chiaro, non potersi formare una serie costante, quantunque cognite le loro superficie, e le loro solidità, se ne possa nella data idea trovar sempre la detta relazione, per la generalità della presente Proposizione.

S c o l i o II.

408. Se invece delle ſuperficie ſi voleſſero nelle sfere paragonare fra loro i raggi riſpetto alle ſolidità, o generalmente ne' corpi ſimili i lati omologhi relativamente ad eſſe ſolidità, replicando il medeſimo raziocinio (395.), ſi troverà, che ſtanno fra loro in ragione compoſta della diretta d' eſſi raggi, o lati omologhi, e della reciproca delle ſolidità ad eſſi anneſſe. Parimente ne' corpi ſimili i lati omologhi riſpetto alle ſuperficie, che tali corpi accompagnano, ſtaranno fra loro in ragion compoſta della diretta di eſſi lati omologhi, e della reciproca di dette ſuperficie. Dal che ravviſaſi, che queſti lati omologhi creſcono più riguardo alle ſolidità, che alle ſuperficie. Queſto metodo è poi applicabile anche ad altre quantità paragonate in ſimil guiſa fra loro.

Appendice I.

409. Nel trattare al Capitolo VI. (317. *e ſeg.*) della rettificazione delle Curve, mi uſcì di mente l' avvertire, che ſuppoſto, eſſere la Curva AQ (*Fig.* 104.) la rettificatrice dell' arco AM, cioè tale, che le ſue applicate PQ eguaglino le corriſpondenti tangenti H*r* (318.), ſe s' immaginerà la Curva AG, le di cui ſunnormali PZ eguaglino le PQ, o le H*r*, ſiccome il ſemiquadrato della PG eguaglia l' area AQP (156.), ne verrà, che l' arco AM ſarà quarto proporzionale dopo la preſa quantità coſtante, l' applicata PG, e la di lei metà; onde quando poſſa coſtruirſi intorno al mede-

desimo asse AP una Curva AG, le di cui sunnormali PZ eguaglino la tangente Ht della data Curva AM, si potrà ottener sempre la sua rettificazione. Il medesimo discorso facciasi riguardo alla Curva VN, che sia anch' essa rettificatrice di detto arco AM, cioè che abbia l' applicata RN eguale alla tangente Ht (318.); perchè potendosi costruire intorno all' asse asteriore AK la Curva AX, la di cui sunnormale WR eguagli la RN, ovvero la Ht, il semiquadrato dell' applicata RX diviso per la presa quantità costante eguaglierà il dato arco AM; il che dimostra, che il Problema della rettificazione delle Curve può risolversi anche col *Metodo inverso delle Tangenti*.

Generalmente poi sarà quadrabile qualunque data Curva AQ, quando sia costruibile la Curva AG di tal natura, che la sua sunnormale PZ eguagli l' applicata PQ d' essa data Curva; qual Curva AG vien detta per tal motivo da' Geometri *Quadratrice* della Curva AQ; sicchè le quadrature, e le rettificazioni delle Curve, le cubature de' solidi, e li spianamenti delle loro superficie si potranno tentare, quando si voglia, anche col detto *Metodo inverso delle Tangenti*.

APPENDICE II.

410. Era stato da me tralasciato il metodo generale per trovar geometricamente gl' Indivisibili di qualunque grado, perchè mi sembrava molto ovvio; pure per soddisfare chi lo bramasse, e per rimettere i detti Indivisibili maggiormente nel loro credito, l' accennerò non solo molto semplice, spedito, e facile, ma dipendente soltanto dalla Proposizione X. (140.).

Sia

Sia pertanto la figura AMBI (*Fig.* 63. 64. 65. 66. 67.), della di cui applicata PM cerchisi l'indivisibile, o elemento del primo grado. Costrutta intorno al medesimo asse AP la figura AYI tale, che le di lei aree AXP (*Fig.* 63. 64. 65. 66.), ovvero PZX (*Fig.* 67.) siano proporzionali alle corrispondenti applicate PM, è manifesto, che la PX esprimente l'indivisibile dell'area AXP, ovvero PZX, denoterà altresì quello dell'applicata PM; ma tirata al punto M la tangente TM, abbiamo l'equazione $PT \times PX = PM$, e però $PX = \frac{PM}{PT}$; dunque l'indivisibile dell'applicata PM sarà $\frac{PM}{PT}$, cioè l'istessa applicata divisa per la sottangente.

Tirinsi ora l'infinitamente prossime PM, *pm*, e dal punto M conducasi la M*o* parallela all'asse AP. Se si supporrà tutto quest' asse diviso in particelle infinitesime eguali P*p*, alle quali corrispondano l'applicate PM, *pm*, fatta ciascuna $Pp = 1$, si avrà l'analogia $mo : 1 :: PM : PT$; onde $mo = \frac{PM}{PT} = PX$; dunque ogni differenza infinitesima *mo* equivale all'indivisibile, o elemento dell'applicata PM.

411. Quindi subito riconoscesi, che l'indivisibile, o elemento d'una quantità costante è eguale a zero, perchè se la figura AMBI fosse un rettangolo, le sue applicate non avrebbero differenza alcuna. In fatti in tal caso l'altra figura AYI sarebbe un'Iperbole Apolloniana tra gli asintoti, sicchè l'indivisibile d'una quantità costante sarebbe tutt' insieme variabile, infinito, ed eguale a zero, il che è un inconveniente.

412. Volendosi poi l'indivisibile della variabile PX, o sia della *mo*, ovvero l'elemento del secondo grado della PM;

de-

descritta intorno al medesimo asse AP una figura AQSI, le di cui aree AQP (*Fig. 63. 65.*), ovvero PZQ (*Fig. 64. 66. 67.*) stiano come l'applicate PX della figura AYI, proporzionale nell'aree all'applicate PM, l'applicata, ovvero l'indivisibile, PQ di tal figura AQSI sarà l'indivisibile, o l'elemento richiesto. Tirata dunque al punto X la tangente *a*X, per esservi l'equazione PX $=$ *a*P $\times$ PQ, si avrà PQ $= \frac{PX}{aP}$, onde posto questo valore in termini di PM, si otterrà l'indivisibile del secondo grado della variabile PM, o sia l'indivisibile dell'infinitesima *mo*.

413. In tal guisa procedendo, si troveranno, quando si vogliano, gl'indivisibili, o elementi degli altri gradi superiori, e se ne potrà fissare in conseguenza la regola fondamentale, che non differirà, com'è chiaro, dalla già assegnata in occasione di trovare gl'indivisibili, o elementi del primo grado.

414. Merita intanto riflessione, che riguardo all'applicata i suoi elementi, o infinitamente piccoli di qualunque grado all'infinito possono esser rappresentati da linee tutte assegnabili; e rispetto all'ascissa le potestà del suo elemento sono sempre esprimibili per l'unità. Ma lascio a chi ha più ozio, e più penetrazione di me, che altrove sono occupato, il rincarire su questi metodi.

415. E qui mi sia concesso di ripetere nuovamente la genesi delle figure geometriche dall'*apposizione* più tosto che dal *flusso*, tornando a dire in primo luogo, che per punto debbesi intendere un estensione inassegnabile in lunghezza, larghezza, e profondità. In secondo luogo che la linea debbesi concepire come risultante d'innumerabili punti posti consecutivamente al contatto, i quali o conservano l'istessa di-

re-

rezione, ed allora ne nasce la linea retta, o mutano continuamente direzione, ed allora formasene la linea curva, e perciò la linea ha lunghezza assegnabile, ma larghezza, e profondità inassegnabili. In terzo luogo, che la superficie si può immaginare come composta d'una moltitudine di linee poste per fianco l'una accanto all'altra, le quali o posano tutte sull'istessa linea retta, ed allora generano la superficie piana, o posano sopra una linea curva, ed allora producono una superficie curva; sicchè la superficie possiede una lunghezza, ed una larghezza amendue assegnabili, ed una profondità inassegnabile. In quarto luogo, che il solido può essere ideato come nascente dall'esatto combaciamento d'innumerabili superficie piane, o curve poste l'una sull'altra, ed allora il solido risultatone può esser rettilineo, o curvilineo, o in parte l'uno, in parte l'altro; e perciò il solido è dotato di lunghezza, larghezza, e profondità tutte assegnabili. In tal guisa la Composizione delle Figure Geometriche sarebbe in quanto a me più chiara, e più comoda, come quella, che non solo più confacente troverebbesi al metodo semplice degl'Indivisibili presi nel loro vero senso, quanto ancora al retto pensare; giacchè trattandosi di cose sottoposte all'umana intelligenza, implica contraddizione, che il punto supposto realmente inesteso sia suscettibile di movimento (P. I. 89.).

Fine del Primo Tomo.

Tav. I.
5.
6.
9.
10.
13.
14.
17.
18.
19.
22.

Tav. II.
25.
27.
28.
31.
32.
35.
36.

Tav. III.
39.
40.
42.
43.
45.
46.

Tav. IV.
50.
52.
53.
56.
59.
60.

Tav. V.
63
66
69.
72.
74.
73.

Tav. VI.
78.
79.
82.
83.
86.
87
89.
88.
94.
93.
92.

97.
98.
101.
102.
105.
106.
109.